Übungsblatt 10

Aufgabe 37. *Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisierung I*

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen Eigenwerte und Eigenvektoren, die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte und falls möglich eine Matrix S, welche auf Diagonalform transformiert.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 38. *Ähnliche Matrizen*

Im Folgenden sind jeweils zwei Matrizen A und B gegeben. Begründen Sie möglichst einfach, warum stets A nicht ähnlich zu B ist.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 39. *Wahr oder falsch?*

(a) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Die geometrische Vielfachheit von λ_1 ist 2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung.

i) A ist diagonalisierbar;
ii) A ist invertierbar;
iii) A ist orthogonal;
iv) A ist positiv definit.

(b) Gegeben sei eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Eigenwerten $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ und zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Der dritte Eigenwert der Matrix B ist $\nu_3 = 0$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung.

i) B ist diagonalisierbar;

ii) B ist invertierbar;

iii) B ist symmetrisch;

iv) Es gilt $B\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ -14 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 40. *Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisierung II*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche α gibt es eine orthogonale Matrix S, so dass

$$S^\top A_\alpha S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

gilt? Geben Sie eine solche Matrix S an.

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 10 (Bearbeitungszeit 23.06–29.06.) im Ilias-Kurs zu den Gruppenübungen in dem Ordner Online-Übungen
`https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto_Uni_Stuttgart_fold_3264159.html`
Der **Bearbeitungszeitraum** startet am Freitag, den 23.06. um 16:00 Uhr und endet am Donnerstag, den 29.06. um 23:55 Uhr. Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei sich die Fragen bei jedem Testdurchlauf ändern und nur der zuletzt gestartete Testdurchlauf gewertet wird. Ihre Ergebnisse aus dem Test können Sie eine Woche lang direkt nach Ende des Bearbeitungszeitraums einsehen.