

Übungsblatt 11

Aufgabe 41. Gradient und ∇ -Operator

Es sei $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^y$. Berechnen Sie $\nabla f(x, y)$, $\text{grad } f(x, y)$, $Jf(x, y)$ sowie $Hf(x, y)$ für alle $(x, y) \in (0, \infty)^2$.

Aufgabe 42. Quadriken

Sei die quadratische Form $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(x) = 3x_1^2 - 3x_2^2 - 8x_1x_2 + 22x_1 + 4x_2 + 7.$$

- (a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $q(x) = x^\top Ax + b^\top x + c$.
- (b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, so dass $q(Sy) = y^\top \Lambda y + \tilde{b}^\top y + c$, wobei $\Lambda \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine Diagonalmatrix und $\tilde{b} \in \mathbb{R}^2$ ist.
- (c) Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : q(x) = 0\}$ anhand der Normalform $\{y \in \mathbb{R}^2 : y^\top \Lambda y + \tilde{b}^\top y + c = 0\}$.

Aufgabe 43. Partielle Ableitungen

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie $\partial_x f(x, y)$, $\partial_y f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (b) Rechnen Sie nach, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Aufgabe 44. Quadratische Formen & Jacobi-Matrix

- (a) Bringen Sie die Quadrik

$$Q = \{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1x_2 + 9x_1 - 4x_2 = 0\}$$

auf Normalform und geben Sie an, um welche Art von Quadrik es sich handelt.

- (b) Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{yz} + 3x^2 \\ \ln(1 + x^2 + y^4) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Jacobimatrix $Jf(x, y, z)$.

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 11 (Bearbeitungszeit 30.06–06.07.) im Ilias-Kurs zu den Gruppenübungen in dem Ordner Online-Übungen

https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto_Uni_Stuttgart_fold_3264159.html

Der **Bearbeitungszeitraum** startet am Freitag, den 30.06. um 16:00 Uhr und endet am Donnerstag, den 06.07. um 23:55 Uhr. Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei sich die Fragen bei jedem Testdurchlauf ändern und nur der zuletzt gestartete Testdurchlauf gewertet wird. Ihre Ergebnisse aus dem Test können Sie eine Woche lang direkt nach Ende des Bearbeitungszeitraums einsehen.