S. Hofbauer
V. Kussmaul
A. Logioti

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

I. Steinwart

Sommersemester 2023

Übungsblatt 13

Dies ist das Bonus-Übungsblatt.

Aufgabe 50. *Laplace-Operator*

Der Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten (r, ϑ) und kartesischen Koordinaten (x, y) ist gegeben durch

$$x = r\cos(\vartheta), \qquad y = r\sin(\vartheta).$$

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei $g\colon (0,\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(r, \vartheta) = f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))$. Ermitteln Sie die Darstellung des Laplaceoperators in Polarkoordinaten, d.h. zeigen Sie:

$$(\Delta f)(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \vartheta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r, \vartheta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2}(r, \vartheta).$$

Aufgabe 51. *Mehrdimensionaler Satz von Taylor*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x, y) = x^2 \mathrm{e}^{y/3}(y - 3) - \frac{1}{2}y^2.$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Stufe von f zum Entwicklungspunkt $(0, 0)$, indem Sie partiell differenzieren.

(b) Bestimmen Sie (ohne partielles Differenzieren) für jedes n, $m \in \mathbb{N}$ die Koeffizienten $A_{n,m}$ der Taylorreihe

$$T_f(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{n,m} x^n y^m.$$

Aufgabe 52. *Mehrdimensionale Extrema*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)(x^2 - 2y).$$

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Nullstellenmenge

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

(b) Skizzieren Sie ebenso die Bereiche, in denen $f(x, y) > 0$ bzw. $f(x, y) < 0$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und zeichnen Sie diese in die Skizze zu den Teilaufgaben (a) und (b) ein.

(d) Geben Sie die Art der kritischen Punkte an.

Aufgabe 53. *Kettenregel*

Gegeben seien die Funktionen $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, mit

$$\psi(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 + 2z, \qquad \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y \\ xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \psi(\varphi(x^3 - 2y, 2x + y)).$$

Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f(1, 1)$ mit Hilfe der Kettenregel.