S. Hofbauer
A. Logioti

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

Sommersemester 2023

I. Steinwart

Vortragsübungsblatt 2

Aufgabe V5. *Potenzreihe*
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2^n+1)}{n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Aufgabe V6. *Taylorreihe*

i) Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = \ln(x)$$

um $x_0 = 1$ und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

ii) Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$g(x) = \sinh^2(x)$$

um $x_0 = 0$ und bestimmen Sie damit die Taylorreihe von

$$h(x) = \sinh(x)\cosh(x).$$

um $x_0 = 0$.

Aufgabe V7. *Unterräume*

a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ sind:
   i) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$
   ii) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \le y\}$
   iii) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\}$

b) Untersuchen Sie, ob durch die folgenden Einschränkungen Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums P_n der Polynome $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ vom Grad $\le n$, mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$, definiert werden:
   i) Grad $p = n$
   ii) $a_k \in \mathbb{Z}$ für $k \in \{0,\ldots,n\}$
   iii) p ist gerade

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien U und V Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   i) $U \cup V$ ist genau dann ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$.
   ii) Die Menge
   $$U + V := \{u + v | u \in U, v \in V\}$$
   ist der kleinste Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, der U und V enthält.