

Vortragsübungsblatt 3

Aufgabe V8. Lineare Unabhängigkeit, Basis

- a) Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

eine Basis von \mathbb{R}^3 ? Stellen Sie den Vektor $(1, 2, 3)^t$ für $\alpha = 0$ als Linearkombination bezüglich dieser Basis dar.

- b) Bestimmen Sie eine Basis der Ebene $E : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ in \mathbb{R}^3 .

Aufgabe V9. Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis

- a) Sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

linear unabhängig? Bildet $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von \mathbb{R}^3 ? Begründen Sie Ihre Antwort.

- b) Bilden die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^4 ? Ist $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ eine Basis von \mathbb{R}^4 ? Begründen Sie Ihre Antwort.

- c) Bestimmen Sie eine Basis der Ebene $E : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ in \mathbb{R}^3 . Bestimmen Sie außerdem ein Erzeugendensystem von E , das keine Basis von E ist.

Aufgabe V10. Vektorraum der reellen Polynome

Es bezeichne $\text{Pol}(\mathbb{R}, 3)$ den Vektorraum der reellen Polynome $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bis zum Grad 3.

- a) Seien $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, 3$. Zeigen Sie, dass $\{f_k : k = 0, 1, 2, 3\}$ eine Basis von $\text{Pol}(\mathbb{R}, 3)$ bildet. Welche Dimension hat dieser Raum?
- b) Beweisen Sie, dass $W = \{p \in \text{Pol}(\mathbb{R}, 3) : p(1) = 0\}$ ein Unterraum von $\text{Pol}(\mathbb{R}, 3)$ ist. Bestimmen Sie eine Basis von W .