

## Vortragsübungsblatt 3

### Aufgabe V8. Lineare Unabhängigkeit, Basis

- a) Für welche Werte des Parameters  $\alpha \in \mathbb{R}$  bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ ? Stellen Sie den Vektor  $(1, 2, 3)^t$  für  $\alpha = 0$  als Linearkombination bezüglich dieser Basis dar.

- b) Bestimmen Sie eine Basis der Ebene  $E : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$  in  $\mathbb{R}^3$ .

### Aufgabe V9. Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis

- a) Sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

linear unabhängig? Bildet  $\{v_1, v_2, v_3\}$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

- b) Bilden die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^4$ ? Ist  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  eine Basis von  $\mathbb{R}^4$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

- c) Bestimmen Sie eine Basis der Ebene  $E : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$  in  $\mathbb{R}^3$ . Bestimmen Sie außerdem ein Erzeugendensystem von  $E$ , das keine Basis von  $E$  ist.

### Aufgabe V10. Vektorraum der reellen Polynome

Es bezeichne  $\text{Pol}(\mathbb{R}, 3)$  den Vektorraum der reellen Polynome  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bis zum Grad 3.

- a) Seien  $f_k(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Zeigen Sie, dass  $\{f_k : k = 0, 1, 2, 3\}$  eine Basis von  $\text{Pol}(\mathbb{R}, 3)$  bildet. Welche Dimension hat dieser Raum?
- b) Beweisen Sie, dass  $W = \{p \in \text{Pol}(\mathbb{R}, 3) : p(1) = 0\}$  ein Unterraum von  $\text{Pol}(\mathbb{R}, 3)$  ist. Bestimmen Sie eine Basis von  $W$ .