S. Hofbauer
A. Logioti

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

Sommersemester 2023

I. Steinwart

Vortragsübungsblatt 4

Aufgabe V 10. *Konvergenz von Reihen über Quotienten*

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2^n+1)}{n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

$$\textbf{i)} \sum_{k=0}^{\infty} k^5 5^k x^k, \qquad \textbf{ii)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^{k^2}} x^k, \text{ mit } b > 1.$$

Aufgabe V 11. *Kern und Bild von Abbildungen*

Gegeben sei die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (2x+y, 4x+2y, 0)$.

a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasen.

b) Geben Sie den Kern und das Bild von f an.

c) Welche Dimension haben $\ker(f)$ bzw. $\operatorname{ran}(f)$?

d) Ist f injektiv?

Aufgabe V 12. *Basis aus Kern und Bild*

Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $\{u_1, u_2\}$ eine Basis des Kerns von f. Weiter seien $v_1, v_2 \in V$ so gewählt, dass $\{f(v_1), f(v_2)\}$ eine Basis des Bildes von f ist. Zeigen Sie, dass $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ eine Basis von V bildet.

Aufgabe V 13. *Darstellende Matrix Polynome*

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}, 3) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R}, 3), \quad p(x) \mapsto p(x+1) - p(x).$$

a) Man bestimme die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis $1, x, x^2, x^3$ von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}, 3)$.

b) Man entscheide, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.