Vortragsübungsblatt 5

Aufgabe V 14. *Darstellende Matrix von Komposition*

Gegeben seien die $\mathbb{K}$-Vektorräume U, V, W versehen mit den Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Weiter seien $S : U \to V$ und $T : V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass

a) $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(TS) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T)\, M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(S)$.

b) Falls $S : U \to V$ bijektiv ist, so gilt $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(S^{-1}) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(S))^{-1}$.

Aufgabe V 15. *Basiswechsel*

Es sei die lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S)$ von S bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ gegeben durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\ker S$ und $\operatorname{ran} S$.

Aufgabe V 16. *Schwerpunktskoordinaten*

Es seien m_1, m_2 reelle Zahlen mit $m_1, m_2 > 0$ und M gegeben durch $M = m_1 + m_2$. Die lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass S bijektiv ist und bestimmen Sie S^{-1}.

Aufgabe V 17. *Invertieren von orthogonalen Matrizen*

Wir nennen eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n)$ **orthogonal**, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle$$

gilt.

a) Zeigen Sie: Ist A orthogonal, so gilt $A^{-1} = A^T$.

b) Zeigen Sie: A ist orthogonal genau dann, wenn für die Spaltenvektoren $(v_1, \ldots, v_n) = A$ gilt, dass

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

c) Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$