S. Hofbauer
V. Kussmaul
A. Logioti

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

Sommersemester 2023

I. Steinwart

Vortragsübungsblatt 6

Aufgabe V18. *Berechnung von Determinanten*
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & 1 \\ -a & a-1 & 4 & -1 \\ 2a & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\det(A), \det(A^4), \det(B), \det(AB)$ und $\det(2A)$.

(b) Für welche Werte von a ist A invertierbar?

Aufgabe V19. *Allgemeine Formel für Inverse*
Sei A eine beliebige $n \times n$ Matrix. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Inverse gegeben ist durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{\#}$$

wobei

$$A^{\#} = (a_{ij}^{\#}), \qquad a_{ij}^{\#} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

und A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist, welche durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A entsteht. Folgern Sie im Fall von $n = 2$, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe V20. *Determinante von linearer Abbildung*

(a) Es seien $A, B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, n)$ und B invertierbar. Zeigen Sie, dass

$$\det(A) = \det(BAB^{-1}).$$

(b) Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Wir definieren für eine lineare Abbildung $S : V \to V$ die Determinante durch

$$\det(S) = \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S)).$$

Zeigen Sie, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ ist.

Aufgabe V21. *Gram-Schmidt*
Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

an.