S. Hofbauer
V. Kussmaul
A. Logioti

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

Sommersemester 2023

I. Steinwart

Vortragsübungsblatt 7

Aufgabe V 22. *Eigenwerte und Eigenvektoren*
Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(3,3)$ im Fall von

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Aufgabe V 23. *Diagonalisierung von hermitescher Matrix*
Es sei die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 2 & -i \\ 2 & i & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von H. Finden Sie eine unitäre Matrix U und einer Diagonalmatrix Λ, sodass $H = U\Lambda U^{-1}$.

Aufgabe V 24. *Schrödinger Gleichung*
Es sei $H \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n,n)$ mit $H = \overline{H}^T$. Nach dem Spektralsatz existiert eine Orthonormalbasis $e_1, ..., e_n$ von $\mathbb{C}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von H:

$$He_j = \lambda_j \, e_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Wir nennen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ Lösung der Schrödinger Gleichung falls

$$i\hbar \frac{d}{dt}\psi(t) = H\psi(t), \quad \psi(0) = \psi_0,$$

gilt, wobei $\hbar > 0$ eine Konstante ist und $\psi_0 \in \mathbb{C}^n$ der Anfangszustand. Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Schrödinger Gleichung gegeben ist durch

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda_j t} \, e_j \, \langle e_j, \psi_0 \rangle.$$

Aufgabe V 25. *Harmonischer Oszillator und ähnliche Matrizen*
Wir betrachten die Differentialgleichung (DGL)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= v(t), \qquad && x(0) = x_0, \\ m\frac{d}{dt}v(t) &= -Dx(t), \qquad && v(0) = v_0, \end{aligned}$$

mit Konstanten $m, D > 0$ und Anfangswerte $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Setzen wir $q(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ so ist die DGL äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}q(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} q(t).$$

Die Lösung ist dann gegeben durch $q(t) = e^{tA}\, q_0$, wobei $e^{tA} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2,2)$ definiert ist durch

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k.$$

Berechnen Sie die Matrix e^{tA} mit den folgenden Schritten:

(a) Fassen Sie A als $\mathbb{C}$-wertige Matrix auf und finden Sie Eigenwerte $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{C}$ und eine Matrix $S \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2,2)$, sodass

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} S^{-1}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$e^{tA} = S \begin{pmatrix} e^{t\lambda_+} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_-} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Geben Sie eine Formel für $x(t)$ an.