Vortragsübungsblatt 9

Aufgabe V 30. *Jacobi-Matrix und Richtungsableitungen*

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = x^2 \cos(y) \cosh(z).$$

(a) Berechen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $Jf(x, y, z)$.

(c) Betrachte die Vektoren $v = (1, 0, 2)$ und $w = (-1, -1, 0)$. Berechen Sie die Richtungsableitungen $D_v f(1, \pi, 0)$ und $D_w f(1, \pi, 0)$

(d) Berechnen Sie $D_u f(1, \pi, 0)$ für $u = v + 2w$.

Aufgabe V 31. *Kettenregel*

Es seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = \left(e^x y^2, \, \frac{\sin y}{z} \right),$$
$$g(a, b) = \left(ab, \, \log b + a^2 \right).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $Jf(x, y, z)$ und $Jg(a, b)$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $Jh(x, y, z)$ von

$$h = g \circ f : f^{-1}(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \to \mathbb{R}^2.$$

(c) Geben Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z)$ und $\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z)$ an.

Aufgabe V 32. *Kugelkoordinaten - Teil 1*

Wir defnieren die Kugelkoordinaten

$$K : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, 0, z) \,|\, x \geq 0\},$$
$$K(r, \varphi, \vartheta) = (x, y, z),$$

durch

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi,$$
$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi,$$
$$z = r \cos \vartheta.$$

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial K}{\partial r}(r,\varphi,\vartheta)$, $\frac{\partial K}{\partial \varphi}(r,\varphi,\vartheta)$, $\frac{\partial K}{\partial \vartheta}(r,\varphi,\vartheta)$ und schreiben Sie diese in Abhängigkeit der Vektoren $e_r, e_\varphi, e_\vartheta \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$e_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $e_r, e_\varphi, e_\vartheta$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $JK(r,\varphi,\vartheta)$ und $|\det JK(r,\varphi,\vartheta)|$.

(d) Verifizieren Sie, dass $e_\vartheta \times e_\varphi = e_r$ und

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}e_r = 0, &&\frac{\partial}{\partial \varphi}e_r = \sin\vartheta e_\varphi, &&\frac{\partial}{\partial \vartheta}e_r = e_\vartheta,\\
&\frac{\partial}{\partial r}e_\varphi = 0, &&\frac{\partial}{\partial \varphi}e_\varphi = -\sin\vartheta e_r - \cos\vartheta e_\vartheta, &&\frac{\partial}{\partial \vartheta}e_\varphi = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial r}e_\vartheta = 0, &&\frac{\partial}{\partial \varphi}e_\vartheta = \cos\vartheta e_\varphi, &&\frac{\partial}{\partial \vartheta}e_\vartheta = -e_r.
\end{aligned}$$