S. Hofbauer
V. Kussmaul
A. Logioti

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

Sommersemester 2023

I. Steinwart

Vortragsübungsblatt 10

Aufgabe V 33. *Kettenregel*

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(y_1, y_2) = (e^{2y_1},\, y_1^2 \cos y_2,\, \sin y_1)$$

und $y : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definert durch

$$\begin{aligned} y_1(x_1, x_2) &= \frac{x_2}{x_1}, \\ y_2(x_1, x_2) &= x_1^3. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von

$$F(x_1, x_2) := f(y_1(x_1,\, x_2),\; y_2(x_1,\, x_2)).$$

Aufgabe V 34. *Kugelkoordinaten - Teil 2*

In der letzen Vortragsübung haben wir die Kugelkoordinaten

$$K(r, \varphi, \vartheta) = (x, y, z), \quad r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi),\ \vartheta \in (0, \pi),$$

definiert durch

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Wir haben nachgerechnet, dass

$$\frac{\partial K}{\partial r} = e_r, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = r \sin\vartheta\, e_\varphi, \quad \frac{\partial K}{\partial \vartheta} = r\, e_\vartheta,$$

bezüglich der Orthonormalbasis $e_r, e_\varphi, e_\vartheta \in \mathbb{R}^3$. Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r} e_r = 0, && \frac{\partial}{\partial \varphi} e_r = \sin\vartheta e_\varphi, && \frac{\partial}{\partial \vartheta} e_r = e_\vartheta, \\ &\frac{\partial}{\partial r} e_\varphi = 0, && \frac{\partial}{\partial \varphi} e_\varphi = -\sin\vartheta e_r - \cos\vartheta e_\vartheta, && \frac{\partial}{\partial \vartheta} e_\varphi = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial r} e_\vartheta = 0, && \frac{\partial}{\partial \varphi} e_\vartheta = \cos\vartheta e_\varphi, && \frac{\partial}{\partial \vartheta} e_\vartheta = -e_r. \end{aligned}$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist in Kugelkoordinaten gegeben durch

$$F(r, \varphi, \vartheta) := f(K(r, \varphi, \vartheta)).$$

Das kann man auch schreiben als $F(r, \varphi, \vartheta) = f(x, y, z)$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\nabla f(x, y, z) = e_r \frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi, \vartheta) + e_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi, \vartheta) + e_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta}(r, \varphi, \vartheta).$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big(rF(r, \varphi, \vartheta)\Big) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} F(r, \varphi, \vartheta), \tag{1}$$

wobei Δ_{S^2} gegeben ist durch

$$\Delta_{S^2} F(r, \varphi, \vartheta) = \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} F(r, \varphi, \vartheta) + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\Big(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} F(r, \varphi, \vartheta)\Big).$$

Eine Formelsammlung für Differentialoperatoren in verschiedenen Korrdinatensystemen ist auf `https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates` zu finden.

Aufgabe V 35. *H-Atom und Separation der Variablen*

Wir suchen eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ und ein $E \in \mathbb{R}$, sodass

$$-\Delta f(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} f(x, y, z) = E\, f(x, y, z). \tag{2}$$

Wir wechseln zu Kugelkoordinaten $F(r, \varphi, \vartheta) = f(x, y, z)$ und machen den Ansatz

$$F(r, \varphi, \vartheta) = \frac{R(r)}{r} Y(\varphi, \vartheta).$$

Nutzen Sie (1) und finden Sie Differentialgleichungen für $R(r)$ und $Y(\varphi, \vartheta)$, sodass f die Gleichung (2) löst.