S. Hofbauer
V. Kussmaul
A. Logioti

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

I. Steinwart

Sommersemester 2023

Vortragsübungsblatt 12

Aufgabe V 40. *Quader größten Volumens*
Wir betrachten Quader mit fester Oberfläche $A > 0$. Bezeichnen wir mit $x, y, z > 0$ die Kantenlängen des Quaders, so gilt also

$$2xy + 2yz + 2xz = A. \tag{1}$$

Finden Sie den Quader mit maximalen Volumen, d.h. finden Sie das Maximum der Funktion

$$V(x, y, z) = xyz$$

unter der Nebenbedingung (1). Geben Sie den maximalen Wert von V in Abhänigkeit von A an.

Aufgabe V 41. *Kurvenlänge*
Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t^2), \quad t \in [0, 3\pi].$$

Aufgabe V 42. *Wegintegrale*
Berechnen Sie

$$\int_\gamma \langle F(x), dx\rangle$$

(a) für $F(x_1, x_2) = (x_2^3, x_1^3)$ und $\gamma(t) = (t^\alpha, t)$, $t \in [0, 1]$, $\alpha \geq 1$.
(b) für $F(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$ und $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$, $t \in [0, 1]$.

Aufgabe V 43. *Geometrische Bedeutung der Rotation*
Wir definieren für $r > 0$ die Kreiskurven

$$\gamma_r(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Zeigen Sie, dass für ein lineares Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt, dass

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \langle F(x), dx\rangle = (\mathrm{rot} F(0))_3. \tag{2}$$

(b) Mit (2) kann man zeigen, dass für **jedes** stetig differenzierbare Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt, dass

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \langle F(x), dx\rangle = (\mathrm{rot} F(0))_3.$$

Interpretieren Sie diese Gleichung geometrisch.