A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

24. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 74. *Kritische Stellen und ihr Typ*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{1-y^2}{x^2+1} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3+y^3$$
$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^4+y^4-1 \qquad j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^4+y^4+2$$

Führen Sie für die Funktionen f, g, h und j jeweils die Schritte **(a)** bis **(d)** durch:

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Rechteck $[-2,2]\times[-2,2] \subseteqq \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle ihren Typ. Bei welchen kann hierbei die Vorzeichenverteilung verwenden werden? Bei welchen die Hesse-Matrix?

Aufgabe P 75. *Modell: Extrema unter Nebenbedingungen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2$. Das Modell zeigt den Graphen von f im Bereich $U_{6/5}(0)$.

(a) Welche der Achsen ist die x- und welche die y-Achse? Durch welche farbigen Linien werden jeweils die Nebenbedingung $x^2+y^2-1=0$ und $y-x^2=0$ beschrieben?

(b) Stellen Sie jeweils für die Nebenbedingungen aus **(a)** das Gleichungssystem gemäß der Multiplikatormethode von Lagrange auf und lösen Sie es. Welche Werte nimmt f an den berechneten Stellen an?

(c) Bei welchen Stellen hilft der Satz vom Minimum und Maximum zur Typbestimmung? Bei welchen die Vorzeichenverteilung?

Aufgabe P 76. *Extremwertesuche auf einem Kompaktum*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y-1)^2(x^2-y)$ und $M := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) \leqq 0\right\}$ mit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2+y^2-2$. Gehen Sie wie folgt vor, um die Extremwerte von f auf M zu bestimmen:

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 von f sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Rechteck $[-2,2]\times[-1,4] \subseteqq \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und deren Typ.

(c) Verwenden Sie die Methode von Lagrange, um die Extremwerte von f auf dem Rand $\partial M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y)=0\right\}$ zu finden.

(d) Bestimmen Sie mittels der Aufgabenteile **(b)** und **(c)** die Extremwerte von f auf M.
Hinweis: Verwenden Sie $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Aufgabe P 77. *Differentiation vektorwertiger Funktionen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z+\sin(xy)\\ x^2\cos(yz)\end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $\mathrm{J}f\,(2,0,1)$

(b) Bestimmen Sie die lineare Approximation zu f im Punkt $(2,0,1)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 80. *Kritische Stellen und ihr Typ*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y^2 - x^2 - 1)\,(x^2 + (y-1)^2 - 4)$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 von f sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Rechteck $[-3,3] \times [-2,4]$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle ihren Typ.

Aufgabe H 81. *Extremwerte unter Nebenbedingungen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2y^2 - 3y^2 + z^2 + z$ und $M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x,y,z) = 0\right\}$ mit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$.

(a) Stellen Sie das Gleichungssystem gemäß der Multiplikatormethode nach Lagrange auf.

(b) Bestimmen Sie damit die Kandidaten für die Extremstellen von f auf M.

(c) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f in M.

(d) Sei $N := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x,y,z) = 0 = h(x,y,z)\right\} \subseteqq M$ mit $h(x,y,z) = y^2$. Bestimmen Sie den maximalen Wert, den f auf N annimmt.

Aufgabe H 82. *Extremwertesuche auf einem Kompaktum*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x^2 + y^2)$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 3x^2 + y^2$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 von f sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Bereich $U_3(0)$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein. Bestimmen Sie jeweils den Typ.

(c) Bestimmen Sie mittels Lagrange-Multiplikatoren das Maximum und das Minimum von f auf $B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) = \frac{3\pi}{2}\right\}$.

(d) Bestimmen Sie die Extremwerte, die f auf der Menge $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) \leqq \frac{3\pi}{2}\right\}$ annimmt und geben Sie jeweils eine zugehörige Stelle $(x,y) \in M$ an.

Aufgabe H 83. *Modell: Extrema unter Nebenbedingungen*

Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2$, sowie $M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x - y^2 = 0\right\}$ und $N := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\right\}$.

Das in der Präsenzübung benutzte Modell von f finden Sie auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/06/

(a) Skizzieren sie die Nullstellenmenge N_0 und die Vorzeichenverteilung von f sowie die Mengen M und N im Bereich $[-2,2] \times [-2,2]$.

(b) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf M und ermitteln sie jeweils deren Typ.

(c) Parametrisieren Sie M durch eine Funktion $c\colon \mathbb{R} \to M$. Prüfen Sie die Existenz von Extremwerten von f auf M, indem Sie die Funktion $f \circ c$ untersuchen.

(d) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf N und ermitteln sie jeweils deren Typ.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 5.7.–11.7.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/