A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

26. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 82. *Kurvenintegrale*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$ und sei K der Rand des Quadrats mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$, im mathematisch positiven Sinn orientiert.

(a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}s$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$, für das Vektorfeld $g = \operatorname{grad} f$.

Aufgabe P 83. *Potential durch Hakenintegral*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u + uv^2 \\ u^2 v + 3v^2 \end{pmatrix} .$$

Wir verwenden die Parametrisierungen

$$H_a\colon [0,a] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad V_{a,b}\colon [0,b] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} ,$$

abhängig von $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $K_{a,b}$ die Kurve, die sich als Zusammensetzung der Kurven ergibt, die von H_a und $V_{a,b}$ parametrisiert werden, und die als Anfangspunkt $(0,0)^\mathsf{T}$ hat.

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix und begründen Sie, warum g ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $U(a,b) := \int_{K_{a,b}} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ von g längs $K_{a,b}$.

(c) Vergleichen Sie $\operatorname{grad} U(u,v)$ und $g(u,v)$. Geben Sie ein Potential von g an.

Aufgabe P 84. *Kurvenintegrale und Potential*

Gegeben seien die Vektorfelder

$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\mathsf{T} \mapsto (-x_2, x_1 - 1)^\mathsf{T}$ und $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\mathsf{T} \mapsto (x_1 - 1, -x_2)^\mathsf{T}$.

Weiterhin sind die Kurven

K parametrisiert durch $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (2 - 2\cos(t), 1 - 2\sin(t))^\mathsf{T}$ und
M parametrisiert durch $D\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (4t, 1)^\mathsf{T}$

von $(0,1)^\mathsf{T}$ nach $(4,1)^\mathsf{T}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie ein Potential des Gradientenfeldes h.

(b) Verwenden Sie Satz 5.3.10, um das Kurvenintegral $\displaystyle\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}x$ zu bestimmen.

(c) Verwenden Sie Definition 5.3.1, um die Kurvenintegrale $\displaystyle\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$ und $\displaystyle\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}x$ zu bestimmen.

(d) Bestimmen Sie die Kurvenintegrale $\displaystyle\int_M g(x) \bullet \mathrm{d}x$ und $\displaystyle\int_M h(x) \bullet \mathrm{d}x$.
Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Teil (b) und (c). Entscheiden Sie, ob ein Potential für g existieren kann.

Hausübungen

Aufgabe H 88. *Kurvenintegrale von Vektorfeldern*

Sei $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = y^2 = z^2,\ 0 \leqq z \leqq 2\right\}$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale der folgenden Vektorfelder längs der Kurve K von $(0,0,0)$ nach $(4,2,2)$.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x^2y \\ -5xyz \\ y\,\mathrm{e}^z \end{pmatrix}$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^x + z \\ \mathrm{e}^x \\ x \end{pmatrix}$.

(*Hinweis:* Vergleichen Sie mit Aufgabe P80.)

Aufgabe H 89. *Länge einer Kurve und Kurvenintegral*

Sei K die Kurve $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = \cosh(x),\ 0 \leqq x \leqq 2\right\}$.

(a) Bestimmen Sie die Länge von K.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y\cosh(x)$. Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}s$.

Aufgabe H 90. *Potential und Kurvenintegrale*

Gegeben seien für $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2\mathrm{e}^{x_1x_2} + (\alpha-1)x_2 \\ x_1\mathrm{e}^{x_1x_2} + \alpha(x_2-1) \end{pmatrix}$$

sowie die Parametrisierung des Kreises K durch $C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld g_α ein Potential hat und geben Sie für diese α ein Potential an.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (a) für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Kurvenintegral $\displaystyle\oint_K g_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}x$.

Aufgabe H 91. *Zirkulation und Ausfluss*

Für ein Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine geschlossene Kurve K in $\mathbb{R}^2$ mit stückweise regulärer Parametrisierung $C\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$, nennen wir

$$Z(f,K) = \int_a^b f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}t$$

die *Zirkulation* von f längs K und

$$A(f,K) = \int_a^b f(C(t)) \bullet \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

den *Ausfluss* von f durch K.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6xy \\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y \end{pmatrix}$ und sei K der Rand des Dreiecks mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, im mathematisch positiven Sinn orientiert. Berechnen Sie

(a) die Zirkulation $Z(f,K)$ von f längs K.

(b) den Ausfluss $A(f,K)$ von f durch K.