R. Adarbeh, J. Joussen,
J. Miller, R. Schmähl,
I. Solonenko

2. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2025

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Grenzwerte von Reihen*

Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2\cdot 4^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^k}$ für $n \in \mathbb{N}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(n+2)(n+3)}$

Hinweis: Zeigen Sie für **(c)** zunächst, dass $\dfrac{1}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$ gilt.

Aufgabe P 2. *Leibniz-Kriterium*

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{2}{n}$ eine alternierende Folge mit Grenzwert 0 ist, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert. Warum kann man hier das Leibniz-Kriterium nicht anwenden?

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass die Summe einer divergenten und einer konvergenten Reihe divergent ist.

Aufgabe P 3. *Konvergenzkriterien*

Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

(a) Weisen Sie Konvergenz nach, indem Sie eine geeignete konvergente Majorante angeben.

(b) Weisen Sie Konvergenz nach, indem Sie das Wurzelkriterium verwenden.

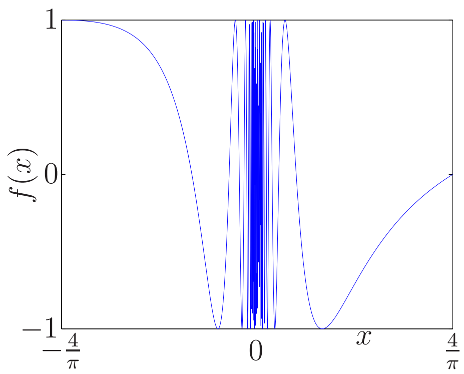
(c) Zeigen Sie, dass mit Hilfe des Quotientenkriteriums keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe getroffen werden kann.

Aufgabe P 4. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Ihr Computerplot ist rechts dargestellt.



(a) Berechnen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{4}{\pi(1+4n)}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

(b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -1$.

(c) Finden Sie eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ so, dass $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(d) Ist f stetig im Punkt $x_0 = 0$? Entscheiden Sie dies unter Verwendung von 1.10.3.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 17.04. – 23.04.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 6. *Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen*

Betrachten Sie für $b \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k \cdot 5^k}(b-2)^{4k}$.

(a) Bestimmen Sie alle Werte von b, für die die Reihe absolut konvergiert.

(b) Bestimmen Sie alle Werte von b, für die die Reihe konvergiert.

Aufgabe H 7. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie folgenden Reihen in Abhängigkeit von $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$ auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\delta^n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\gamma}{1+\gamma^j}\right)$

Aufgabe H 8. *Majoranten und Minoranten*

Zeigen Sie mithilfe des Majorantenkriteriums, dass die folgenden Reihen konvergieren bzw. divergieren.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+\sqrt{k^2+1}}}{k^2}$, **(b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{k+1}-\sqrt[4]{k}}{\sqrt[3]{k+1}}$, **(c)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{k+1}-\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{k+2}}$.

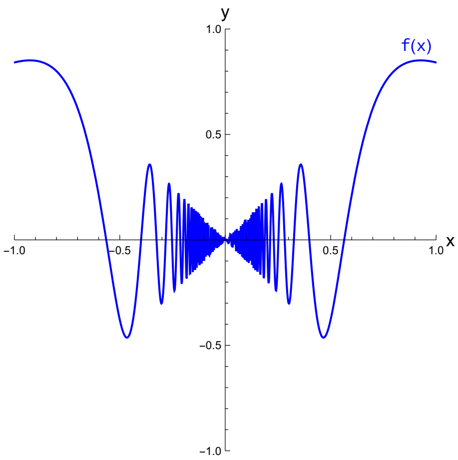
Hinweis: Die verallgemeinerte harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für alle $\alpha > 1$.

Aufgabe H 9. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left\{\begin{cases} \sqrt{10^{-10}+x^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 10^{-5} & x = 0 \end{cases}\right. .$$

Ihr Computerplot ist rechts dargestellt.



(a) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0.$$

(b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 10^{-5}$.

(c) Finden Sie eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ so, dass $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(d) Ist f stetig im Punkt $x_0 = 0$?

Frischhaltebox

Aufgabe H 10. *Folgen, Induktion*

Ein Frosch ist in einen 50 Meter tiefen Brunnen gefallen. Jeden Tag klettert der Frosch 32 Meter hoch und ruht sich über Nacht aus, wobei er $\frac{2}{3}$ seiner Höhe (vom Boden) wieder hinabrutscht. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Mühen des Frosches vergeblich sind und er den Brunnen nie verlassen wird.