R. Adarbeh, J. Joussen,
J. Miller, R. Schmähl,
I. Solonenko

**3. Gruppenübung zur Vorlesung**
# Höhere Mathematik 2
Sommersemester 2025

M. Stroppel

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 5.** *Stetige Fortsetzung*
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $M$ der Funktion

$$f\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2},$$

und untersuchen Sie das Verhalten von $f$ für $x \to 1-0$, $x \to 1+0$, $x \to 2-0$, $x \to 2+0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$. An welchen Stellen ist $f$ stetig fortsetzbar? Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

**Aufgabe P 6.** *Funktionsgrenzwerte*
Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

**(a)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^7 - 5x^3 + x - 2}{9x^7 + 8x^6 - x^2 + 1}$

**(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

**(c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5\cos(x^2)}{2x}$

**(d)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-3}\right)$

**Aufgabe P 7.** *$\varepsilon$-$\delta$-Kriterium*
Zeigen Sie mit Hilfe des $\varepsilon$-$\delta$-Kriteriums, dass die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der angegebenen Stelle $x_0$ stetig sind.

**(a)** $f(x) = 5x - 3,\ x_0 = 1$

**(b)** $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2},\ x_0 = 0$

**Aufgabe P 8.** *Grenzwerte und Stetigkeit*
Sei $a$ ein reeller Parameter. Wir betrachten die Funktionen

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} ax^3 & \text{für } x \leqq 1 \\ (ax)^2 - 2 & \text{für } x > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{2,4\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{(x-2)^2(x-4)}{|x^2 - 6x + 8|}.$$

**(a)** Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f_a(x)$ und $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} f_a(x)$.
Für welche Werte des Parameters $a$ ist $f_a$ an der Stelle $1$ stetig?

**(b)** Berechnen Sie $g(2-0)$, $g(2+0)$ und $g(4-0)$, $g(4+0)$.
Ist $g$ an der Stelle $2$ stetig ergänzbar? Ist $g$ an der Stelle $4$ stetig fortsetzbar?

**Online-Aufgabe**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 24.04. – 30.04.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

## Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

**Aufgabe H 11.** *Stetige Fortsetzung*

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich $D \subseteqq \mathbb{R}$ an und untersuchen Sie ihr Verhalten an den Rändern von $D$ (inklusive $-\infty$ und $+\infty$).

**(a)** $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 4x - 1}$

**(b)** $g(x) = \cos\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

An welchen Punkten in $\mathbb{R}$ und mit welchen Funktionswerten lassen sich die Funktionen (einseitig) stetig fortsetzen?

**Aufgabe H 12.** *Grenzwerte und Stetigkeit*

Sei $\alpha \geqq 0$ ein reeller Parameter. Sei

$$f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \sqrt{6x+7} - \sqrt{\dfrac{\alpha}{7}x + 3} & x > 3 \\ -\cos(\pi x) & x \leqq 3 \end{cases}$$

**(a)** Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$. Für welche $\alpha$ liegt dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$?

**(b)** Bestimmen Sie die Nullstellen von $f_\alpha$ in Abhängigkeit von $\alpha$.

**(c)** Bestimmen Sie $\alpha_0$ so, dass $f_{\alpha_0}$ in $x_0 = 3$ stetig ist.

**Aufgabe H 13.** *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

**(a)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x^3 + 9x - 123456789}{x^3 - 3x^2 + 4x - 3}$

**(b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin(\tan(x))$

**(c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}\cos(x^2) + \mathrm{e}^x\right)$

**(d)** $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{4x^8}{\sqrt{5x^{18} + 25x^{16}} - \sqrt{5x^{18} + 4x^{16}}}$

**Aufgabe H 14.** *Stetigkeit*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq -2 \\ \frac{3}{2}|x| & \text{für } -2 < x < 2 \\ 3 & x \geqq 2 \end{cases}$.

**(a)** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f$.

**(b)** Sei eine Fehlerschranke $1 > \varepsilon > 0$ gegeben.
Finden Sie in Abhängigkeit von $\varepsilon$ ein $\delta_1 > 0$ mit $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ für $x \in [2, 2+\delta_1)$ und ein $\delta_2 > 0$ mit $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ für $x \in (2-\delta_2, 2]$. Ist $f$ an der Stelle $2$ stetig?

**(c)** Finden Sie ein $\varepsilon > 0$, für welches kein $\delta > 0$ existiert mit $f(U_\delta(-2)) \subseteqq U_\varepsilon(f(-2))$. Ist $f$ an der Stelle $-2$ stetig?

**Frischhaltebox**

**Aufgabe H 15.** *Häufungspuntke von Folgen*

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = (-1)^{n!} + \mathrm{i}^n$.