R. Adarbeh, J. Joussen,
J. Miller, R. Schmähl,
I. Solonenko

4. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2
Sommersemester 2025

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 9. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte und Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n \cdot n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=17}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{2n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \left(z+3-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^n$

Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihen absolut konvergieren.
Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren.

Aufgabe P 10. *Umkehrung*

Bestimmen Sie für folgende Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils einen größtmöglichen Bereich D, auf dem f invertierbar ist.

(a) $f(x) = x^3$ **(b)** $f(x) = \cos(x)$ **(c)** $f(x) = \mathrm{e}^x$

Aufgabe P 11. *Potenzreihen II*

Gegeben sei $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} \left(\frac{z-1+\mathrm{i}}{2}\right)^n$.

(a) Schreiben Sie $f(z)$ als komplexe Potenzreihe der Form $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit geeigneten $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) Skizzieren Sie den Konvergenzkreis der Potenzreihe in der komplexen Zahlenebene.

(c) Zeichnen Sie die Stellen $z = -2+3\mathrm{i}, z = 3-\mathrm{i}, z = 5-\mathrm{i}$ und $z = 4+\mathrm{i}$ in Ihre Skizze ein.

(d) Untersuchen Sie, an welchen dieser Stellen die Potenzreihe konvergiert.

Aufgabe P 12. *Zwischenwertsatz*

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $(1+x^3)\sqrt{x} = 1$ genau eine Lösung $x > 0$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass es für jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 01.05. – 07.05.)
auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 16. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien und Entwicklungspunkte der folgenden komplexen Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3z+2)^n}{\sqrt{n-1}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{3n} \left(\frac{n+1}{4n+1}\right)^n$

Untersuchen Sie diese ferner in den Randpunkten der Konvergenzkreise auf Konvergenz.
In (a) genügt hierbei die Konvergenzuntersuchung in den reellen Randpunkten.

Aufgabe H 17. *Grenzwerte*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x+10} - \sqrt[3]{x-3}$

Hinweis: Was ist $(a-b)(a^2+ab+b^2)$?

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(\sqrt{x})}{x}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)^2}{x-2}$

Aufgabe H 18. *Nullstellenproblem*

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \sin(3x)-x$.

(a) Zeichnen Sie die Funktion f zwischen $x\in[-1,1]$.

(b) Zeigen Sie, dass f in $[-1,1]$ mindestens drei Nullstellen besitzt.

(c) Berechnen Sie mit Algorithmus 1.13.13 ausgehend von den Schranken $a_0=0.5,\ b_0=1$ die Schranken $a_5,\ b_5$ der Nullstelle in $(0,1)$.

Aufgabe H 19. *Konvergenzradien*

Betrachten Sie die Potenzreihen $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^{3n}$ und $g(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}3^n z^n$.

(a) Bestimmen Sie Konvergenzradien ρ_f und ρ_g mittels Wurzelkriterium.

(b) Geben Sie jeweils für $f(z)$ und $g(z)$ einen geschlossenen Ausdruck an.
Die durch diese Ausdrücke beschriebenen Funktionen haben Definitionslücken. Geben Sie die Lage ebendieser in Relation zur Konvergenzkreisscheibe an: „im Inneren“/„außerhalb“/„auf dem Rand“.

(c) Das Produkt $h(z)=f(z)g(z)$ hat ebenfalls eine Reihendarstellung $h(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$.
Bestimmen Sie c_n für $0\leqq n\leqq 3$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 20. *Komplexe Gleichungen*

Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichungen:

(a) $(3+2\mathrm{i})^4=w$ **(b)** $z^2=10+20\mathrm{i}$