R. Adarbeh, J. Joussen,
J. Miller, R. Schmähl,
I. Solonenko

**5. Gruppenübung zur Vorlesung**
# Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2025

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 13.** *Ableitungsregeln*

Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen $f_j$ mit

**(a)** $f_1(x) = (1-x^2)\cdot\tan(x)$

**(b)** $f_2(x) = \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

**(c)** $f_3(x) = \cos(\cos(x))$

**(d)** $f_4(x) = x^x$

**Aufgabe P 14.** *Differenzierbarkeit*

**(a)** An welchen Stellen ihres Definitionsbereichs sind die folgenden reellen Funktionen nicht differenzierbar?

**(i)** $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \sqrt{(x-5)^2}$

**(ii)** $g\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \begin{cases} 2\sqrt{x}-2 & \text{für } 0<x<1 \\ \ln x & \text{für } x \geqq 1 \end{cases}$

**(b)** Für welche Parameterpaare $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ist die folgende Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + b\cos x + b + 1 & \text{für } \ x<0, \\ b\mathrm{e}^x + a\mathrm{e}^{-x} - 4 & \text{für } x \geqq 0. \end{cases}$$

**Aufgabe P 15.** *Stetigkeit und Differenzierbarkeit*

Betrachten Sie die Funktion $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \begin{cases} 0 & x\leqq -1 \\ x^2-1 & x\in[-1,1] \\ 2(x-1) & x \geqq 1 \end{cases}.$

(a) An welchen Stellen $g$ stetig?

(b) An welchen Stellen ist $g$ stetig differenzierbar?

(c) An welchen Stellen ist $g$ zweimal stetig differenzierbar?

(d) Existiert zu $g$ eine Umkehrfunktion auf $\mathbb{R}$?
Existiert eine Umkehrfunktion, wenn man $g$ auf $\mathbb{R}_0^+$ einschränkt?

**Aufgabe P 16.** *Ableitungen*

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender reeller Funktionen:

**(a)** $f(x) = e^{\sin(x)+\cos(x)}$

**(b)** $g(x) = (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2$

**(c)** $h(z) = 2^{-z} - 4z$

**(d)** $j(x) = \arctan(\cos(x))$

**Online-Aufgabe**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 08.05. – 15.05.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

## Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

**Aufgabe H 21.** *Differenzierbarkeit und Tangenten*

Sei $m \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $f$ eine Funktion mit

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} (x-1)(x+2)^2+5\,, & x \leqq 0 \\ (x+1)^2+mx\,, & x > 0 \end{cases}.$$

**(a)** Für welche $m \in \mathbb{R}$ ist $f$ stetig?

**(b)** Für welche $m \in \mathbb{R}$ ist $f$ an der Stelle $0$ differenzierbar?

**(c)** Bestimmen Sie für den in **(b)** bestimmten Wert von $m$ die Gleichung der Tangente $T$ an den Graphen von $f$ an der Stelle $0$. Skizzieren Sie die Tangente $T$ sowie den Graphen.

**Aufgabe H 22.** *Ableitungen berechnen*

**(a)** Berechnen Sie für folgende Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils $f'$:

**(i)** $f(x) = \cos(x^3 - 2x^2 + 2)$

**(ii)** $f(x) = \sin(x)\,\cos(x^2)$

**(iii)** $f(x) = x^{2x+1}$.

**(b)** Der Cotangens hyperbolicus coth ist definiert durch $\mathrm{coth}(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.
Zeigen Sie, dass $\mathrm{coth}'(x) = 1 - (\mathrm{coth}(x))^2$ gilt.

**Aufgabe H 23.** *Monotonie*

Betrachten Sie die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 4x+2$.

**(a)** Berechnen Sie $f(0)$ und $g(0)$.

**(b)** Bestimmen Sie $f'$ und $g'$ und werten Sie die Ableitung in $0$ aus.

**(c)** Folgern Sie $f(x) \geqq g(x)$ für alle $x \geqq 0$.

**Aufgabe H 24.** *Ableitungen*

Bestimmen Sie im Folgenden jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteqq \mathbb{R}$ von $f$.
Bestimmen Sie ferner erste und zweite Ableitung.

**(a)** $f(x) = \ln(\tan(3x)^4)$

**(b)** $f(y) = \dfrac{1}{1-cy^4}, \quad c \in \mathbb{R}^+$

**(c)** $f(\xi) = \sqrt{\dfrac{(\xi+1)^4}{\xi^4+1}}$

**(d)** $f(\eta) = \dfrac{\eta^4-1}{\eta^2+1}2^\eta$

**Frischhaltebox**

**Aufgabe H 25.** *Potenzreihen*

Bestimmen Sie Konvergenzradien und Entwicklungspunkte folgender Potenzreihen:

$$f(z) = \sum_{n=3}^{\infty}(z-1)^n\frac{n-2}{n+1} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z^2-2(2-1\mathrm{i})z+(3-4\mathrm{i}))^n}{3^{2n}}$$