

Präsenzübungen

Aufgabe P 17. Mittelwertsatz

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{x}$.

- (a) Bestimmen Sie eine Zwischenstelle $\xi \in (1, 4)$ so, dass $f'(\xi) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1}$ ist.
(b) Begründen Sie mit dem Mittelwertsatz die Ungleichungen

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) < \sqrt{x} - 1 < \frac{1}{2}(x-1) \quad \text{für } x > 1.$$

Skizzieren Sie die Graphen der drei beteiligten Funktionen.

Aufgabe P 18. Funktionsgrenzwerte

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}, \quad \alpha, \beta > 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^2 - 4x + 4}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sin(\pi x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 5}}{3x - 1}$

Aufgabe P 19. Approximation des Sinus

- (a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(\sin, x, 0)$ und das zugehörige Restglied nach Lagrange $R_3(\sin, x, 0)$.
(b) Skizzieren Sie die Graphen der Taylorpolynome $T_0(\sin, x, 0)$, $T_1(\sin, x, 0)$, $T_2(\sin, x, 0)$ und $T_3(\sin, x, 0)$. Vergleichen Sie diese mit dem Graphen von $\sin$.
(c) Bestimmen Sie eine möglichst gute obere Schranke für $|\sin(x) - x|$ durch Abschätzung des Restglieds $R_1(\sin, x, 0)$ für $x \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\}$.
(d) In Anwendungen wird oft die folgende Approximation verwendet: „Für kleine Winkel ist $\sin(x) \approx x$ “. Für welche x ist dies zu rechtfertigen?

Aufgabe P 20. Extremalstellen und Monotonie

Gegeben ist die Funktion

$$\tanh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Bestimmen Sie die Ableitung von $\tanh$. Untersuchen Sie $\tanh$ auf Nullstellen, Extremalstellen und Monotonie. Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x)$. Skizzieren Sie den Graphen von $\tanh$ und geben Sie den Wertebereich an.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 15.05. – 21.05.) auf folgender Webseite.

<https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/>



Hausübungen (Abgabe in ILIAS):**Aufgabe H 26.** *Satz von Rolle*

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \prod_{k=1}^{2025} (x - k)$. Wieviele reelle Nullstellen und lokale Extrema besitzt die j -te Ableitung $f^{(j)}$ der Funktion f für $j = 1, \dots, 2024$? Bestimmen Sie ferner $f^{(2024)}(x)$.

Hinweis: Liegt bei einer differenzierbaren Funktion $h: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum vor, so gilt $h'(x_0) = 0$.

Aufgabe H 27. *Differentialquotient und Mittelwertsatz*

- (a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für $0 < a < b$ und $n > 1$ die Ungleichung $n(b - a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b - a)b^{n-1}$.
- (b) Prüfen Sie, ob der Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = x^2 - x^{2/3}$ im Intervall $[-1, 8]$ anwendbar ist.
- (c) Die Temperatur in einer Stadt wird zu zwei verschiedenen Zeiten am Tag gemessen. Um 6:00 Uhr morgens beträgt die Temperatur 12°C , und um 12:00 Uhr mittags beträgt sie 24°C . Der Zeitintervall zwischen den beiden Messungen beträgt 6 Stunden. Erkläre anhand des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, warum die Temperatur zu irgendeinem Zeitpunkt während des Tages mit 2°C pro Stunde gestiegen ist.

Aufgabe H 28. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^x - 2^{x+3} + 16}{(x - 2)^2}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^5) + x^5}{x^5 + e^{(-x^5)}}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(x) + \alpha x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^{(e^x)}$

Aufgabe H 29. *Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung*

- (a) Gegeben ist die Funktion $f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sqrt[3]{2x + 2}$.
 - (i) Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ auf.
 - (ii) Schätzen Sie das Lagrange-Restglied zum Taylorpolynom 2. Grades für $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$ unabhängig von x ab.
- (b) Gegeben ist die Funktion $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Bestimmen Sie die Taylorreihe an der Stelle $x = 0$.

Frischhaltebox**Aufgabe H 30.** *Ableitung und Bewegung eines Objekts*

Der Ort eines Objekts zum Zeitpunkt t sei durch die Funktion $s(t) = -\frac{1}{2}(t - 4)^2$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Objekts zum Zeitpunkt t .
- (b) Hält das Objekt irgendwann an? Wenn ja, wann?