

Präsenzübungen

Aufgabe P 29. Konvergenz uneigentlicher Integrale

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$

(b) $\int_3^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3} dx$

Aufgabe P 30. Potenzreihen

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^{n+1}$.

Wir betrachten nun die Funktion $f: (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$.

(b) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'' .

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f' .

(e) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f .

Aufgabe P 31. Grenzwertkriterium und Integralvergleichskriterium

(a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Grenzwertkriteriums, ob das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\tan(x)} dx$ konvergiert.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $\frac{1}{\tan(x)}$ um ihr Ergebnis zu bestätigen.

(c) Untersuchen Sie die Integrale $\int_1^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{x}\right) dx$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{k}\right)$ auf Konvergenz.

Aufgabe P 32. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion g sei außerdem p -periodisch für ein $p > 0$, das heißt es gilt $g(x+p) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\int_a^b f(x) f'(x) dx$

(c) $\int_{a-p}^{a+p} g'(x) \sin(g(x)) dx$

(b) $\int_a^{a+p} \frac{g'(x)}{g(x)} dx$

(d) $\int_a^{a+p} \frac{f'(x)}{g(x)} dx - \int_a^{a+p} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} dx$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 05.06. – 18.06.) auf folgender Webseite.

<https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/>



Hausübungen (Abgabe in ILIAS):**Aufgabe H 41.** *Gamma-Funktion*

Wie in der Vorlesung sei die *Gamma-Funktion* definiert durch

$$\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_{0+0}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

- (a) Zeigen Sie durch partielle Integration: Für alle $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
 (b) Folgern Sie aus (a) per vollständiger Induktion, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
 (c) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(x)} dx$.

Aufgabe H 42. *Ober- und Untersummen*

Gegeben sei die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sowie die Partitionen

$$P_n = \left\{ \frac{k}{n} \mid k = 0, 1, 2, \dots, n \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}.$$

- (a) Bestimmen Sie $\underline{S}(f, P_n)$ und $\overline{S}(f, P_n)$.
 (b) Argumentieren Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, P_n)$.
 (c) Bestimmen Sie den Grenzwert aus (b).

Aufgabe H 43. *Konvergenzkriterien*

Entscheiden Sie jeweils, gegebenenfalls in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha > 0$, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren. Sie müssen dabei keine Grenzwerte angeben.

(a) $\int_2^{+\infty} \frac{2x^3}{x^\alpha - 1} dx$

(b) $\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx$

Hinweis: Zu (b): Schreiben Sie zunächst $\sin(x^2) = 2x \sin(x^2) \cdot \frac{1}{2x}$ und integrieren Sie partiell.

Aufgabe H 44. *Integration durch Partialbruchzerlegung*

Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$.

Frischhaltebox**Aufgabe H 45.** *Quadrik, euklidische Normalform*

Gegeben sei die Quadrik $Q := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 2xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 3\}$.
 Bestimmen Sie eine euklidische Normalform für Q .