R. Adarbeh, J. Joussen,
J. Miller, R. Schmähl,
I. Solonenko

10. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2
Sommersemester 2025

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 33. *Folgen in $\mathbb{R}^n$*

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen in $\mathbb{R}^n$ auf Konvergenz. Berechnen Sie die Grenzwerte, falls sie existieren.

(a) $a_k = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{k^2}{k!} + 2, \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)$

(b) $b_k = \left(\frac{1}{k^2}, \cos(\pi k)\right)$

(c) $c_k = \left(\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}, \frac{2k+1}{k}\right)$

Aufgabe P 34. *Topologische Eigenschaften*

Betrachten Sie die Teilmengen $M_1 = [0,1]$ und $M_2 = M_1^\circ$ von $\mathbb{R}$, sowie die Teilmenge $M_3 = M_1 \times M_2$ von $\mathbb{R}^2$.

(a) Skizzieren Sie die Mengen M_1 und M_2 in $\mathbb{R}$.
Skizzieren Sie ferner die Menge M_3 in $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie für die Mengen M_2 und M_3 die inneren Punkte und die Randpunkte. Argumentieren Sie mit Hilfe der Definitionen 4.2.14.

(c) Für welche $k \in \{1,2,3\}$ ist M_k abgeschlossen?
Welche dieser Mengen sind weder abgeschlossen noch offen?

(d) Welche dieser Mengen sind beschränkt? Welche sind kompakt?

Aufgabe P 35. *Richtungsableitung, Ableitung längs eines Vektors*

Gegeben ist die Abbildung $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: (x,y,z) \mapsto 3xye^z + x^3z - 2xyz$.

(a) Berechnen Sie $\nabla f(x,y,z)$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung $\partial_{(-1,1,3)} f(1,2,0)$ längs $v = (-1,1,3)$.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_u f(1,2,0)$ längs $u = \frac{1}{\sqrt{11}}(-1,1,3)$.

(d) Finden Sie alle Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\partial_w f(1,2,0) = 0$.

Aufgabe P 36. *Stetigkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen*

Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right). \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{für } \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right). \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Niveaulinien N_t von f zum Niveau t für $t = -\frac{1}{2}$, $t = 0$ und $t = \frac{1}{2}$.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Ist f in $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ stetig?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 19.06. – 25.06.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 46. *Topologische Eigenschaften*

Gegeben sei die Menge $M := \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup ([0,1] \times [0,1]) \subsetneq \mathbb{R}^2$.

(a) Skizzieren folgende Teilmenge von M: $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \leqq 5 \right\} \cup ([0,1] \times [0,1])$.

(b) Bestimmen Sie die inneren Punkte von M.

(c) Bestimmen Sie die Randpunkte von M.

(d) Ist M kompakt?

Aufgabe H 47. *Stetigkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z)^\mathsf{T} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y,z)^\mathsf{T} = (0,0,0)^\mathsf{T}, \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^4+z^8} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie für jeden Punkt $(x_0,y_0,z_0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$, dass die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto f\left((tx_0,ty_0,tz_0)^\mathsf{T}\right)$$

stetig ist.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f\left((\frac{1}{n^4},\frac{1}{n^2},\frac{1}{n})^\mathsf{T}\right)$.

(c) Ist f stetig?

Aufgabe H 48. *Partielle Ableitungen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,t) \mapsto t^2 \mathrm{e}^{2x} \cos(xy+t)$. Berechnen Sie die folgenden partielle Ableitungen:

(a) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y,t)$

(b) $f_{yt}(x,y,t)$

(c) $\mathrm{D}^{(1,0,0)}\mathrm{D}^{(0,2,0)} f(x,y,t)$

(d) $\partial_v f(0,1,\pi)$ für $v = (1,2,-1)$.

Aufgabe H 49. *Gradient und Richtungsableitung*

In Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f^\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f^\alpha \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2 y^2}.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f^α.

(b) Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen von f^α an der Stelle $(1,1)^\mathsf{T}$ in der Richtung $(1,-2)^\mathsf{T}$.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ wird die Steigung in **(b)** maximal?

Frischhaltebox

Aufgabe H 50. *Eigenwerte und positive Definitheit*

Gegeben sei die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie die Eigenwerte von A und entscheiden Sie ob A positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.