J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

15. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 53. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Welche der folgenden Reihen konvergieren? Konvergieren diese sogar absolut?

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{k(k+1)}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(4^k+5^k)}{(-9)^k}$

Aufgabe P 54. *Teleskopsummen*

Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right),$$

indem Sie ihre "Teleskopstruktur" ausnutzen.

Aufgabe P 55. *Stetigkeit*

Entscheiden Sie ob folgende Funktionen stetig in ihrem Definitionsbereich sind.

(a) $f_1 \colon [0,2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{falls } 0 \leqq x \leqq 1, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon f_2(x) = |x|$

(c) $f_3 \colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} \colon f_3(x) = \frac{1}{x^2}$

Aufgabe P 56. *Folgen und Häufungspunkte*

(a) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Finden Sie gegebenenfalls eine obere Schranke, eine untere Schranke oder beides.

- **(i)** $\left(\frac{n+2}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
- **(ii)** $\left(\frac{3^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf ihre Häufungspunkte. Geben Sie jeweils eine Teilfolge an, welche gegen den Häufungspunkt konvergiert.

- **(i)** $\left((-1)^n \frac{3(n-2)(n-1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
- **(ii)** $\left(\exp\left((-1)^n \cdot n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 18.04. – 24.04.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 71. *Folgen und Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Häufungspunkte und geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen den Häufungspunkt konvergiert.

(a) $\left(\frac{3(n+1)-n(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{n}{2n+1}\sin\left(\pi\frac{n(-1)^n}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe H 72. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k!}+(-1)^k\frac{1}{k}\right)$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{10^k}{k!}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{k^2+k+1}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{3k}-4^k}{11^k}$

Aufgabe H 73. *Potenzreihen*

Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}3^k(2x-1)^k$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{\sqrt{k}}$

Aufgabe H 74. *Stetigkeit*

Es seien zwei Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x)=x^2+x-2 \quad \text{und} \quad g(x)=\begin{cases}2 & x\leqq -2,\\ -1 & -2<x\leqq 1,\\ \frac{1}{x-1} & x>1.\end{cases}$$

Geben Sie alle $x\in\mathbb{R}$ an, in denen

(a) f stetig ist.

(b) g stetig ist.

(c) $f\cdot g$ stetig ist.

Frischhaltebox

Aufgabe H 75. *Komplexe Wurzeln*

Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3=\mathrm{i}$ und geben Sie sie in der Form $a+b\mathrm{i}$ an.