J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

16. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 57. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x}{-x-3}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sin(x)\cos(x)}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to0+0} \dfrac{x^3+3x}{3x^3+x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Aufgabe P 58. *Stetigkeit*

Bestimmen Sie möglichst große Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf denen die folgenden Definitionen sinnvoll sind:

(a) $f_1 \colon x \mapsto \frac{x-1}{|x-3|}$

(b) $f_2 \colon x \mapsto \ln\left(\ln(1+x^2)\right)$

(c) $f_3 \colon x \mapsto \dfrac{\cos(3x)}{\sin(2x)}$

Untersuchen Sie diese Funktionen auf Stetigkeit und bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken in den Definitionsbereichen. An welchen dieser Lücken sind die Funktionen stetig fortsetzbar?

Aufgabe P 59. *Nullstellensatz*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}\colon f(x)=\cos(x) \quad \text{und} \quad g\colon [0,\pi]\to\mathbb{R}\colon g(x)=\sin(3x).$$

Zeigen Sie, dass die Graphen von f und g mindestens drei Schnittpunkte besitzen.

Aufgabe P 60. *Umkehrfunktionen und Stetigkeit*

Die folgenden Funktionen sind bijektiv. Entscheiden Sie jeweils ob die Funktion stetig ist, bestimmen Sie die Umkehrfunktion und untersuchen Sie diese ebenfalls auf Stetigkeit.

(a) $f_1\colon \mathbb{R}\smallsetminus\{1\} \to \mathbb{R}\smallsetminus\{5\}\colon x\mapsto \frac{2}{x-1}+5$

(b) $f_2\colon [0,1]\to[b,a+b]\colon x\mapsto ax+b$ mit $a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$

(c) $f_3\colon (1,3]\cup(5,6] \to \left(1,\sqrt{3}\right]\cup\left(\sqrt{5},\sqrt{6}\right]\colon x\mapsto\sqrt{x}$

(d) $f_4\colon \left(-\frac{\pi}{2},0\right]\cup\left(2\pi,\frac{5\pi}{2}\right]\to(-1,1]\colon x\mapsto\sin(x)$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 25.04. – 01.05.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 76. *Funktionsgrenzwerte*

Bestimmen Sie folgende Funktionsgrenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x^5 - 4x^3 + \pi}{2x^5 - 4x^2 + 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(\cos(x))^2 - 2}{\frac{x-5}{2x^3-1}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin(x^3)}{x^4}$

Aufgabe H 77. *Stetigkeit*

Sei $p \geqq 0$ ein reeller Parameter. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{3(2-x)} & \text{für } x < 2, \\ \sqrt{x^2 + px} - \sqrt{x^2 + 8x + 29} & \text{für } x \geqq 2. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ in Abhängigkeit von p.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f in Abhängigkeit von p.

(c) Für welche Werte des Parameters p ist f an der Stelle $x = 2$ stetig?

Aufgabe H 78. *ε-δ-Kriterium für Stetigkeit*

Verwenden Sie das ε-δ-Kriterium, um zu zeigen, dass die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ an jeder Stelle $x_0 \geqq 0$ stetig ist. Geben Sie insbesondere für beliebiges $x_0 \geqq 0$ und $\varepsilon > 0$ ein δ_ε als Formel explizit an, so dass die ε-δ-Beschreibung erfüllt ist. Können Sie δ_ε unabhängig von x_0 wählen?

Aufgabe H 79. *Umkehrfunktion*

Gegeben sei die Funktion $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-2x - x^2} & \text{falls } -2 \leqq x < 0, \\ \sqrt{1 - x^2} - 1 & \text{falls } 0 \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

(a) Prüfen Sie, ob f stetig ist.

(b) Finden Sie möglichst große Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die Einschränkung $f : [a, b] \to [c, d]$ bijektiv ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} rechnerisch.

(c) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine geeignete Skizze.

Frischhaltebox

Aufgabe H 80. *Häufungspunkte komplexer Folgen*

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge $\left(\frac{(-1)^n}{(1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^n)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen konvergiert.