J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

17. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Aufgaben zum Selbststudium
(keine Übungsgruppen in der Woche 29.04–05.05 wegen Feiertag)

Aufgabe P 61. *Konvergenz von Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte und Konvergenzradien für die folgende Potenzreihen.

(a) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i}z+1-3\mathrm{i})^n}{n^2}$,

(b) $g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{\sqrt{n}}$,

(c) $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i}^n)^n(1+z)^n}{(n+1)}$.

Aufgabe P 62. *Differenzierbarkeit*

Setzen Sie die Funktionen f und g an der Stelle $x_0 = 0$ stetig fort und untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die beiden Funktionen an dieser Stelle differenzierbar sind.

(a) $f : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $g : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Aufgabe P 63. *Umkehrfunktionen*

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem ein:

(a) $f_1 \colon [-1,3] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 2^x$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} 3\,x+3 & \text{für } x < -1 \\ (x+1)^2 & \text{für } -1 \leqq x \leqq 1 \\ 6 - \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$

Prüfen Sie ob diese Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen, bzw. ob dies durch Änderung des Definitions- oder Wertebereichs erreicht werden kann. Geben Sie ggf. die Definitions- und Wertebereiche der Umkehrfunktionen an.

Aufgabe P 64. *Intervallhalbierungsmethode*

Betrachten Sie die stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto (x-1)(x+2)$ und $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie a_4 und b_4 mit der Intervalhalbierungsmethode für die Funktion f, wenn $a_1 = 0$ und $b_1 = 3$. (Siehe **1.13.13** im Buch für die Definitionen von a_j und b_j.)

(b) Sei $a_1, b_1, c \in \mathbb{R}$, $a_1 < c < b_1$, so dass $g(a_1) < 0 < g(b_1)$ und $g(c) = 0$. Außerdem sei $g(x) \neq 0$ für $x \in [a_1, b_1] \smallsetminus \{c\}$. Für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$c_j = \frac{a_j + b_j}{2}.$$

Zeigen Sie

$$|c_j - c| \leqq \frac{|b_1 - a_1|}{2^j}.$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 02.05. – 08.05.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 81. *Rechenregeln für Potenzreihen*

Seien f und g die Reihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2 - 4z + 4}{4} \right)^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}(z-2)^n.$$

(a) Schreiben Sie $f(z)$, $g(z)$ als Potenzreihe und geben sie deren Konvergenzradius an.

(b) Bestimmen Sie $(f+g)(z)$, $(f \cdot g)(z)$ als Potenzreihe und geben sie deren Konvergenzradius an.

Aufgabe H 82. *Potenzreihen und Gleichungen*

Seien f und g die Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $g(z)$, wenn $\rho_f > 0$ ist.

(b) Bestimmen Sie $c_n \in \mathbb{R}$ so dass $a_n = c_n a_1$, $n > 1$, wenn

$$\begin{aligned} &g(z) = f(z) + 2, \ |z| < \min(\rho_f, \rho_g) \\ &f(0) = 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n z^n$, dann $b_n = \tilde{b}_n$.

(c) Schreiben Sie f und g als Traszendentalfunktionen (z. B.: $\exp$, $\sin$, $\log$).

Aufgabe H 83. *Kreistangenten*

Sie werden beauftragt, einen neuen Leuchtturm zu bauen. Wie hoch müssen Sie den Leuchtturm bauen, damit er auch für kleine Boote (bei denen sich die Perspektive der Besatzung näherungsweise auf Höhe der Wasseroberfläche befindet) bereits aus einer Entfernung von $25\,\mathrm{km}$ zu sehen ist? Unter der Entfernung verstehen wir hierbei die Distanz, die das Boot noch zurücklegen muss, um den Fußpunkt des Leuchtturms zu erreichen.
Hinweis: Für diese Aufgabe darf ausnahmsweise ein gewöhnlicher Taschenrechner verwendet werden. Sie können mit einem Erdumfang von $40\,000\,\mathrm{km}$ rechnen.

Aufgabe H 84. *Stetigkeit von Umkehrfunktionen*

Es sei $f : M \to S$ eine bijektive, stetige Funktion mit $M, S \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $M = [a,b]$ für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : S \to M$ stetig.

(b) Folgern Sie, dass der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Frischhaltebox

Aufgabe H 85. *Eigenwerte und Eigenräume*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 53 & -36 \\ 72 & -49 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume.