J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

18. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 65. *Ableitungen*
Bestimmen Sie f' für die folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R}\smallsetminus\{-\frac{1}{2}\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{\sinh(x)}{2x+1}$.

(b) $f\colon (-1,+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \log(x+1)\cdot(x+1)^x$.

(c) $f\colon (2,17)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \arctan\left(\mathrm{e}^{3x+2}\right)$.

Aufgabe P 66. *Ableitungsregeln*

(a) Berechnen Sie die Ableitungen von $\sin(x)^2$ und von $\cos(x)^2$. Verwenden Sie diese, um die Ableitung von $\sin(x)^2+\cos(x)^2$ zu berechnen. Was fällt Ihnen auf?

(b) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(0)=1,\quad f'(0)=2,\quad f(1)=2,\quad f'(1)=-1,\quad g(1)=3,\quad g'(1)=\frac{1}{3},$$

sowie

$$h_1\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto (g\circ f)(x)\quad\text{und}\quad h_2\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto f(x)\,g(x)\sqrt{3+\left(f(x)\right)^2+\left(g(x)\right)^2}\,.$$

Berechnen Sie $h_1'(0)$ und $h_2'(1)$.

Aufgabe P 67. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

(a) Untersuchen Sie, ob für die Funktion

$$f\colon\ [\mathrm{e},4\mathrm{e}]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto (\ln x)^3$$

auf dem Intervall $[\mathrm{e},4\mathrm{e}]$ eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f\left([\mathrm{e},4\mathrm{e}]\right)\to[\mathrm{e},4\mathrm{e}]$ existiert.

(b) Berechnen Sie für alle x_0, für die f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar ist, die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\ f^{-1}(y)\Big|_{y=f(x_0)}\ .$$

Aufgabe P 68. *Differentiation von Umkehrfunktionen*
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon\ (-3,\infty)\to(-\infty,1)\colon\ x\mapsto\frac{x+1}{x+3}\,.$$

(a) Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}, falls sie existiert.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} mittels Satz 2.3.1.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} direkt, also unter Verwendung von **(b)** und ohne Satz 2.3.1.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 09.05. – 15.05.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 86. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich sowie die erste Ableitung der Funktionen

(a) $f_1(x) = \ln\big(\cot(x)\big) + e^{3x}$,

(b) $f_2(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-9}}$,

(c) $f_3(x) = x^{e^x}$, und

(d) $f_4(x) = \operatorname{sech}\left((x+1)^2\right)$.

Aufgabe H 87. *Mehrfaches Ableiten*

Seien $a,\, b \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie jeweils eine Formel für die angegebene n-te Ableitung, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.

(a) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (\sin(ax) + \cos(ax))$,
Hinweis: Additiontheoreme für Sinus und Kosinus.

(b) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (x\mathrm{e}^x + a^{-x})$, wobei $x > 0$,

(c) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (f(x)g(x))$, wobei f und g unendlich oft differenzierbare Funktionen sind, und

(d) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \frac{1}{a-bx}$, wobei $x \neq \frac{a}{b}$.

Aufgabe H 88. *Kettenregel*

(a) Seien $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, $f(x) = e^{y(x)}$ und $g(x) = x^2 + 2x - 1$. Bestimmen Sie f', $(g \circ y)'$ und $(g \circ f)'$.

(b) Die Gleichung $x^3y^3 + xy = 4$, mit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $xy \neq 0$, definiert implizit eine differenzierbare Funktion, d. h. $y = y(x)$. Berechnen Sie mit hilfe der Kettelregel y'. (Die Antworten werden sowohl x als auch y enthalten.)

Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung auf beiden Seiten der Gleichung und lösen Sie nach y' auf.

Aufgabe H 89. *Umkehrfunktionen der Hyperbel-Funktionen*

Betrachten Sie die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned}
\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2},\\
\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{und}\\
\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x &\mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Maximale Menge M so, dass die Funktion

$$\operatorname{artanh}\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \tanh^{-1}(x)$$

definiert ist.

(b) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\operatorname{artanh}(x)\Big|_{x=x_0}$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.
Hinweis: Satz 2.3.1 kann hilfreich sein.

(c) Sei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Berechen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\operatorname{artanh} \circ f)(x)$, $x \neq 0$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 90. *Faktorisierung von Polynomen*

Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^3 + 3z^2 + z - 5$ in Linearfaktoren (über $\mathbb{C}$).
Hinweis: $p(z)$ hat eine ganzzahlige Nullstelle.