J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

21. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 77. *Partialbruchzerlegung (siehe 3.4.5 im Skript)*

Gegeben sei die gebrochen rationale Funktion $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{q(x)}{p(x)}$, wobei

$$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \qquad\qquad q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2$$

(a) Zerlegen Sie $q(x) = a(x)p(x) + q_1(x)$ für Polynomfunktionen $a(x)$ und $q_1(x)$ so, dass der Grad von $q_1(x)$ kleiner ist als der Grad von $p(x)$.
Hinweis: Polynomdivision.

(b) Berechnen Sie eine Zerlegung $p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{m_i} \prod_{i=n+1}^{n+l}(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{m_i}$ wobei $\Delta_i = \gamma_i - \frac{\beta_i^2}{4} > 0$ für $i \in \{n+1, \ldots, n+l\}$.
Hinweis: Die Aufgabenstellung verrät bereits die reellen Nullstellen von $p(x)$.

(c) Bestimmen Sie reelle Zahlen A_{ik}, B_{ik} und C_{ik} so, dass

$$f(x) = a(x) + \frac{q_1(x)}{p(x)} = a(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{ik}}{(x-\alpha_i)^k} + \sum_{i=n+1}^{n+l}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{B_{ik}+C_{ik}x}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^k}.$$

Aufgabe P 78. *Partialbruchzerlegung II*

Finden Sie jeweils eine Partialbruchzerlegung der folgenden Funktionen.

(a) $\dfrac{1}{x^2-1}$ **(b)** $\dfrac{x^2+2}{x^4+2x^2+1}$ **(c)** $\dfrac{x^2-3x+1}{x^3+x}$

Aufgabe P 79. *Integration*

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von 3.4.7–3.4.9 im Skript.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+5}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{2}{(x^2+x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+x+5}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 80. *Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln 7}} 2xe^{(x^2)}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+2024}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Für Teil (c) ist 3.3.6 im Skript hilfreich.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 06.06. – 12.06.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 101.

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x^4-12x^2+3}{x^5-4x^3+3x-435}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)^3}+\frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 102. *Partialbruchzerlegung*

Geben Sie eine Partialbruchzerlegung der folgenden gebrochen rationalen Funktionen an.

(a) $\dfrac{3-x}{1-x^2}$ **(b)** $\dfrac{x^3}{(x^2+2x+2)^2}$ **(c)** $\dfrac{x^2+x+1}{x^5+2x^3+x}$ **(d)** $\dfrac{2x}{x^2-1}$

Aufgabe H 103. *Integration gebrochen rationaler Funktionen*

Berechnen Sie eine Stammfunktion der gebrochen rationalen Funktion

$$f\colon [1,2]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{x^3+2x^2+2x+2}{x^3+x^2+x+1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Aufgabe H 104. *Ein Kriterium für die Konvergenz von Reihen*

Es sei $f_n\colon [1,n+1]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{1}{x^2}$ für $n\in\mathbb{N}$

(a) Begründen Sie, dass für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\overline{S}(f_n,P_n) \qquad\qquad \underline{S}(f_n,P_n)=\overline{S}(f_n,P_n)-1+\frac{1}{(n+1)^2}$$

für die Ober- und Untersumme von f_n zur Partition $P_n=\{1,\dots,n+1\}$ gilt.

(b) Begründen Sie warum

$$\int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqq \int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x+1$$

gilt und berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(c) Begründen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ gegen einen Grenzwert in $[1,2]$ konvergiert.

Frischhaltebox

Aufgabe H 105.

Berechnen und vereinfachen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\arctan(x)$ mit Hilfe von Satz 2.3.1 im Skript.