

Präsenzübungen

Aufgabe P 81. Geschlossene Formeln durch Integration

Gegeben sei die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

- (a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ von f .
- (b) Berechnen Sie eine Stammfunktion F der Funktion $f: (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$.
- (c) Geben Sie eine geschlossene Formel für F an.
Hinweis: Geometrische Reihe.
- (d) Geben Sie eine geschlossene Formel für f an, indem sie F differenzieren.

Aufgabe P 82. Majoranten- und Grenzwertkriterium

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

- (a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx$
- (b) $\int_{0+0}^1 \frac{\cos(x) - 1}{x^2} dx$
- (c) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} dx$
- (d) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + x - 7}{x^4 + 2x^3 + x^2} dx$

Aufgabe P 83. Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

- (a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$
- (b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$
- (c) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

Aufgabe P 84. Hauptsatz der Integralrechnung

Seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

- (a) $\int_0^x f'(g(t))g'(t) dt$
- (b) $\frac{d}{dx} \int_0^x f(g(f(t))) dt$
- (c) $\frac{d}{dx} \int_{-x}^{x^2} f(t) dt$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 13.06. – 19.06.)
auf folgender Webseite.

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/>



Hausübungen (Abgabe in ILIAS):**Aufgabe H 106.** *Geschlossene Formeln*

Berechnen Sie geschlossene Formeln für die folgenden Potenzreihen.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)x^n$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x^n$$

Tip: Führen Sie einen Sanity-check durch, d.h. überprüfen Sie beispielsweise durch Einsetzen, dass Ihre geschlossene Formel für $x = 0$ korrekt ist.

Aufgabe H 107. *Majoranten- und Grenzwertkriterium*

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} dx$$

$$(c) \int_{20}^{+\infty} \frac{1}{(\ln(x^{24}))^3} dx$$

$$(b) \int_{-1}^{0-0} \frac{-1}{\sin(x)} dx$$

$$(d) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx$$

Aufgabe H 108. *Uneigentliche Integrale*

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

$$(a) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

$$(b) \int_{0+0}^1 \ln(x) dx$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$(d) \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{e^x} dx$$

Aufgabe H 109. *Geschlossene Formeln II (2+1+1)*

Geben Sie geschlossene Formeln für die folgenden Ausdrücke an.

$$(a) \sum_{n=5}^{\infty} n^2 x^n$$

$$(b) \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1}$$

$$(c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 110.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{2024} .