Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 37. *Modell: Einschaliges Hyperboloid*

Die Quadrik Q in $\mathbb{R}^3$ sei in Standardkoordinaten gegeben durch

$Q : x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3+(3\sqrt{2}-\sqrt{6})x_1-2\sqrt{6}x_2-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})x_3-6=0.$

Ein Modell von Q hatten Sie in den Übungen in den Händen. Sie finden dies auch unter: www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/03/.

Sei das kartesische Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Dieses wird im Modell farbig dargestellt.

(a) Geben Sie eine Gleichung von Q in Koordinaten y_1, y_2, y_3 bezüglich $\mathbb{F}$ an.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst schreiben wir die Gleichung von Q in die Form

$$x^{\mathsf{T}} A\, x + a^{\mathsf{T}} x + c = 0 \tag{19}$$

um mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}-\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \\ -3\sqrt{3}-\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad c = -6.$$

Nach 4.7.6. ist ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(y) = Fy + 0$ gegeben durch

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Für eine Gleichung von Q bezüglich $\mathbb{F}$ setzen wir also $x = Fy$ in (19) ein und erhalten

$$y^{\mathsf{T}}(F^{\mathsf{T}} A\, F)y + (F^{\mathsf{T}} a)^{\mathsf{T}} y + c = 0.$$

mit

$$F^{\mathsf{T}} A\, F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad F^{\mathsf{T}} a = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit wird Q bezüglich $\mathbb{F}$ durch die folgende Gleichung beschrieben.

$$3y_1^2 + 6y_2^2 - 3y_3^2 - 6y_1 + 6y_3 - 6 = 0 \tag{20}$$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein Koordinatensystem $\mathbb{G}$, bezüglich dem Q diese Normalform annimmt.

Lösungshinweise hierzu: In Teil (a) haben wir bereits den ersten Schritt der Hauptachsentransformation durchgeführt. Als zweiten Schritt verschieben wir den Ursprung des Koordinatensystems, um den linearen Teil zum Verschwinden zu bringen.

Durch quadratische Ergänzung können wir Gleichung (20) wie folgt umschreiben.

$$3\left((y_1-1)^2-1\right)+6y_2^2-3\left((y_3-1)^2-1\right)-6=0$$

Wir setzen nun $z := y - {}_{\mathbb{F}}P$ mit

$${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P := {}_{\mathbb{E}}P = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\2\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Bezüglich des Koordiatensystems

$$\mathbb{G} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\2\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

wird Q damit beschrieben durch die folgende Gleichung.

$$3z_1^2+6z_2^2-3z_3^2-6=0$$

Division durch (-6) liefert uns die zugehörige euklidische Normalform.

$$-\frac{1}{2}z_1^2-z_2^2+\frac{1}{2}z_3^2+1=0$$

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Die Ebene E_α sei bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G}$ beschrieben durch die Gleichung $z_1 = \alpha$. Bestimmen Sie die Gestalt von $Q \cap E_\alpha$ in Abhängigkeit von α.

Lösungshinweise hierzu: Einsetzen von $z_1 = \alpha$ in die Gleichung von Q aus Teil (b) liefert die folgende Beschreibung von $Q \cap E_\alpha$.

$$-z_2^2+\frac{1}{2}z_3^2+(1-\frac{\alpha^2}{2})=0$$

Falls $(1-\frac{\alpha^2}{2})=0$, d.h. $\alpha \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, so erhalten wir die Gleichung $-z_2^2+\frac{1}{2}z_3^2=0$ für den Schnitt und damit ein schneidendes Geradenpaar.

Falls $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, so erhalten wir die Gleichung $-\frac{2}{2-\alpha^2}z_2^2+\frac{1}{2-\alpha^2}z_3^2+1=0$. Damit tragen die Koeffizienten der zwei quadratischen Terme verschiedene Vorzeichen. Also ist die Gestalt von $Q \cap E_\alpha$ in diesem Fall eine Hyperbel.

(d) Bestimmen Sie eine Gleichung für E_{-1} in Standardkoordinaten x_1, x_2, x_3.

Lösungshinweise hierzu: Nach 4.7.6. ist ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ gegeben durch ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) = F^{\intercal}x - F^{\intercal}P$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + 2x_2 + x_3) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 - x_2 + x_3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} z_1 = -1 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + 2x_2 + x_3) - 1 = -1 \\ &\Leftrightarrow \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung für E_{-1} in Standardkoordinaten ist also $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

Aufgabe H 38. *Rekursive Folge, Definition Grenzwert, Monotonie*

Sei die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{2n}{n+3}$ gegeben.

(a) Finden Sie zwei verschiedene rekursive Darstellungen der Folge.

Lösungshinweise hierzu: Aus $a_n = \frac{2n}{n+3}$ berechnen wir die ersten Folgenglieder $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_2 = \frac{4}{5}$, welche uns als Startwerte für die Rekursionsvorschriften dienen. Wir berechnen zunächst $a_n - \gamma a_{n-1}$ für $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$a_n - \gamma a_{n-1} = \frac{2n}{n+3} - \gamma\frac{2(n-1)}{(n-1)+3} = \frac{2n(n+2)(1-\gamma) + 6\gamma}{(n+3)(n+2)}.$$

Setzen wir $\gamma = 1$, so erhalten wir für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Rekursionsvorschrift

$$a_n := a_{n-1} + \frac{6}{(n+3)(n+2)},\ n \geqq 2 \quad \text{mit} \quad a_1 := \frac{1}{2}.$$

Setzen wir $\gamma = \frac{5}{4}$, so erhalten wir hingegen die Rekursionsvorschrift

$$a_n := \frac{5}{4}a_{n-1} - \frac{(n+5)(n-3)}{2(n+3)(n+2)},\ n \geqq 2 \quad \text{mit} \quad a_1 := \frac{1}{2}.$$

Alternativ ist es möglich den Quotienten $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n+2)n}{(n+3)(n-1)}$ für $n \geqq 2$ zu berechnen. Eine weitere Rekursionsdarstellung für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist somit gegeben surch

$$a_n := \frac{(n+2)n}{(n+3)(n-1)}\,a_{n-1},\ n \geqq 2 \quad \text{mit} \quad a_1 := \frac{1}{2}.$$

Zudem ist es auch möglich mehrere Folgenglieder zu betrachten. Zum Beispiel folgt aus

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = -2\frac{n^3+3n^2-7n-15}{(n+3)(n+2)(n+1)} = 6\left(-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right) - 2$$

die Rekursionsdarstellung

$$a_n := a_{n-1}+a_{n-2}+6\left(-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right)-2,\ n \geqq 3 \quad \text{mit} \quad a_1 := \frac{1}{2},\ a_2 := \frac{4}{5}.$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Finden Sie dazu ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - 2| < \varepsilon$ ist für $n > n_\varepsilon$.

Lösungshinweise hierzu: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann soll für $n > n_\varepsilon$ gelten, dass $|a_n - 2| < \varepsilon$ ist. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2n < 2n+6 = 2(n+3) \iff \frac{2n}{n+3} < 2 \iff \frac{2n}{n+3} - 2 < 0. \qquad (21)$$

Damit erhalten wir

$$|a_n - 2| < \varepsilon \iff \left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| < \varepsilon \overset{(21)}{\iff} -\frac{2n}{n+3} + 2 < \varepsilon \overset{\substack{n+3>0,\\ \varepsilon>0}}{\iff} \frac{6}{\varepsilon} - 3 < n.$$

Somit ist für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ die Bedingung $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon := \frac{6}{\varepsilon} - 3$ erfüllt.

(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und begründen Sie Ihre Antwort mittels **(b)**.

Lösungshinweise hierzu: In Aufgabenteil **(b)** wurde gezeigt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon := \frac{6}{\varepsilon} - 3$ so existiert, dass für alle $n > n_\varepsilon$ die Bedingung

$$|2 - a_n| = |a_n - 2| < \varepsilon.$$

erfüllt ist. Mit **Definition 1.4.1** folgt dann sofort, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ gilt.

(d) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist $(a_n + \frac{q}{n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend?

Lösungshinweise hierzu: Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch $b_n := a_n + \frac{q}{n+3}$ mit beliebigem, aber festem $q \in \mathbb{R}$. Es soll nun $q \in \mathbb{R}$ so bestimmt werden, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend ist. Dazu muss gemäß **Definition 1.2.2** die Ungleichung $b_{n+1} > b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
b_{n+1} > b_n &\iff a_{n+1} + \frac{q}{n+4} > a_n + \frac{q}{n+3} \\
&\iff \frac{2(n+1)}{n+4} + \frac{q}{n+4} > \frac{2n}{n+3} + \frac{q}{n+3} \\
&\iff \frac{(2n+q)+2}{n+4} - \frac{2n+q}{n+3} > 0 \\
&\iff \frac{-(2n+q)+2(n+3)}{(n+4)(n+3)} > 0 \\
&\iff \frac{6-q}{(n+4)(n+3)} > 0.
\end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n+4>0$ und $n+3>0$ und somit $(n+4)(n+3)>0$. Damit ist der Bruch auf der linken Seite in der letzten Ungleichung positiv für alle $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $6-q>0 \iff 6>q$. Also ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng mononton steigend für alle $q \in \mathbb{R}$, welche $6>q$ erfüllen.

Aufgabe H 39. *Konvergenz und Häufungspunkte*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Bestimmen Sie zudem jeweils alle Häufungspunkte, sowie den Limes superior und den Limes inferior der Folgen.

(a) $a_n = \dfrac{4n^3-1}{10n^2+5\sqrt{n}}$

(b) $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{\dfrac{2n}{5^{n^2}}} + \dfrac{\sin(n)}{n}$

(c) $a_n = \operatorname{Im}\left(2^{-n}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n\right)$

(d) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k+(-1)^k}{7^k}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{4n^3-1}{10n^2+5\sqrt{n}} = \frac{(2n\sqrt{n}-1)(2n\sqrt{n}+1)}{5\sqrt{n}(2n\sqrt{n}+1)} = \frac{2n\sqrt{n}-1}{5\sqrt{n}} = \frac{1}{5}\left(2n-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > \frac{1}{5}n,$$

wobei die letzte Ungleichung aus

$$2n\sqrt{n}-1 > 2n\sqrt{n}-n\sqrt{n} = n\sqrt{n} \quad \Longrightarrow \quad 2n-\frac{1}{\sqrt{n}} > n$$

folgt. Die Folge $(\frac{1}{5}n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$. Da nun $a_n > \frac{1}{5}n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ (also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$) und es gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty$.

(b) Wir können die Folgenglieder schreiben als

$$a_n = (-1)^n \sqrt[n]{\frac{2n}{5^{n^2}}} + \frac{\sin(n)}{n} = \left(-\frac{1}{5}\right)^n \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} + \frac{\sin(n)}{n} = b_n + c_n$$

mit $b_n := \left(-\frac{1}{5}\right)^n \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$ und $c_n := \frac{\sin(n)}{n}$. Wir untersuchen nun separat die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.
Da $\left|-\frac{1}{5}\right| < 1$, folgt mit Beispiel 1.5.8.1, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = 0$. Mit Beispiel 1.5.7 erhalten wir zudem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ und aus Beispiel 1.5.10 schließlich $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Mit den Grenzwertsätzen 1.5.3 folgt somit insgesamt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Betrachten wir nun $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir erhalten wegen $-1 \leqq \sin(n) \leqq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\sin(n)}{n} \leqq \frac{1}{n}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, folgt mit dem Sandwichsatz 1.5.6, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.
Mit den Grenzwertsätzen 1.5.3 folgt damit schließlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n = 0 + 0 = 0.$$

Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es folgt mit Satz 1.6.10 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 0$.

(c) Wegen $2^{-n}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$ können die Folgenglieder geschrieben werden als $a_n = \operatorname{Im}\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) = \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$.
Wir finden Teilfolgen so, dass der Sinus-Term in jeder Teilfolge konstant bleibt:

$$\begin{aligned} a_{3k} &= \sin(2\pi k) = 0, & a_{3k+1} &= \sin\left(2\pi k + \tfrac{2\pi}{3}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a_{3k+2} &= \sin\left(2\pi k + \tfrac{4\pi}{3}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, & a_{3k+3} &= \sin(2\pi(k+1)) = 0. \end{aligned}$$

Jedes Folgenglied von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch ein Glied einer der konstanten Teilfolgen $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{3k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{3k+2})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{3k+3})_{k\in\mathbb{N}}$ abgedeckt. Die Häufungspunkte sind genau die Grenzwerte dieser Teilfolgen, also 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Es gilt somit $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mehr als einen Häufungspunkt besitzt, ist sie nach Satz 1.6.10 divergent.

(d) Wir schreiben die Folgenglieder als

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k + (-1)^k}{7^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{7}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{7}\right)^k.$$

Da $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$ und $\left|-\frac{1}{7}\right| < 1$, folgt mit dem Beispiel der geometrischen Reihe 1.8.4

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{7}\right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{3}{7}} = \frac{7}{4}, \\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{7}\right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{7}\right)^k = \frac{1}{1+\frac{1}{7}} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Mit den Grenzwertsätzen 1.5.3 für Folgen erhalten wir insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k + (-1)^k}{7^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{7}\right)^k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{7}\right)^k = \frac{7}{4} + \frac{7}{8} = \frac{21}{8}.$$

Mit Satz 1.6.10 folgt damit $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \frac{21}{8}$.

Online-Aufgabe.
Zu diesem Übungsblatt gibt es keine Online-Aufgabe.