A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

14. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 40. *Häufungspunkte, Konvergenz von Folgen und Reihen*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Häufungspunkte. Geben Sie jeweils eine Teilfolge an, welche gegen den Häufungspunkt konvergiert.

Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

(a) $a_n = (-1)^n \tan\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ **(b)** $a_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n^2+2n}{2n+4}\cdot\pi\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 3k \text{ mit } k \in \mathbb{N} \\ -\sqrt{3} & \text{falls } n = 6k-5 \text{ oder } 6k-4 \text{ mit } k \in \mathbb{N} \\ \sqrt{3} & \text{falls } n = 6k-2 \text{ oder } 6k-1 \text{ mit } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bemerkung: Anstatt $6k-5$, $6k-4$, $6k-2$ und $6k-1$ sind auch $6k+1$, $6k+2$, $6k+4$, und $6k+5$ möglich. Hier wurde obige Notation verwendet, um die Elemente a_1, a_2, a_4 und a_5 ebenfalls aufzuführen.

Die Häufungspunkte sind 0, $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$.

Die Teilfolge $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Häufungspunkt 0. Die Teilfolgen $(a_{6k-5})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{6k-4})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen den Häufungspunkt $-\sqrt{3}$. Die Teilfolgen $(a_{6k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{6k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen den Häufungspunkt $\sqrt{3}$.

Die Folge konvergiert nicht, da sie drei Häufungspunkte besitzt.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge darum konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht.

(b) Es gilt

$$a_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^k}{2k} & \text{falls } n \text{ gerade mit } n = 2k \text{ und } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Wegen $|a_n| \leqq \frac{1}{n}$ ist 0 der einzige Häufungspunkt und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kann man wie folgt schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Die Folge $\left|\frac{(-1)^k}{k}\right|$ ist eine monoton fallend Nullfolge. Daraus folgt nach Lemma 1.9.5, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Aufgabe H 41. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz (im Teil (b) in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}^+$).

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} + \frac{n^{12}}{7^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\cosh(2n)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $u_n = 2^{-2n}$. Es ist $\sqrt[n]{|u_n|} = \dfrac{1}{4}$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{4} < 1.$$

Nach 1.9.16 konvergiert folglich die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n}$.

Sei $v_n = \dfrac{n^{12}}{7^n}$. Es ist $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{7}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{12}$ und daraus folgt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{7} < 1$.

Nach 1.9.13 konvergiert folglich die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{12}}{7^n}$.

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} + \frac{n^{12}}{7^n}$ ist also konvergent als Summe von zwei konvergenten Reihen (Satz 1.9.3).

(b) Sei $u_n = \left(a + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Es ist $\sqrt[n]{|u_n|} = a + \dfrac{1}{n}$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = a.$$

Nach 1.9.16 konvergiert die Reihe für $a < 1$ und divergiert sie für $a > 1$. Für $a = 1$, erhält man die Folge $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, die gegen e konvergiert und somit keine Nullfolge ist. Darum divergiert die Reihe auch in diesem Fall.

(c) Sei $u_n = (-1)^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$. Wegen

$$|u_n| = \frac{\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)}$$

ist die Folge $|u_n|$ monoton fallend mit

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)} = 0$$

folgt nach Lemma 1.9.5, dass die Reihe konvergiert.

(d) Es ist $\dfrac{\mathrm{e}^n}{\cosh(2n)} = \dfrac{2\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{2n} + \mathrm{e}^{-2n}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^n} \cdot \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-4n}} < \dfrac{2}{\mathrm{e}^n}$. Die geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ konvergiert wegen $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$. Nach 1.9.10 konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\cosh(2n)}$ ebenfalls.

Aufgabe H 42. *Geometrische Reihen*

Konvergiert die Reihe? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{-3^{k+1}}{2^{2k}}$ **(b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k}\sqrt{(2\mathrm{e})^k}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $a_k = \frac{-3^{k+1}}{2^{2k}}$ für $k \in \mathbb{N}$. Es ist $a_k = -3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k$. Wir haben

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{2} a_k = -3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k + 3 \cdot \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{3}{4}$. Nach 1.8.4 haben wir

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $|q| = \frac{3}{4} < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ nach 1.5.8. Daraus folgt dass die Reihe konvergiert mit

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-3)^{k+1}}{2^{2k}} = -3 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right) + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{81}{16}.$$

(b) Sei $a_k = \mathrm{e}^{-k}\sqrt{(2\mathrm{e})^k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Es ist $a_k = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}^k$. Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}^k$ ist eine geometrische Reihe mit $q = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$. Nach 1.8.4 haben wir

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $|q| = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}} < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ nach 1.5.8. Daraus folgt dass die Reihe konvergiert mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}^k = \frac{1}{1-\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}}.$$

Aufgabe H 43. *Teleskopreihen*

Konvergiert die Reihe? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$ **(b)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$. Wir erhalten

$$S_n = \underbrace{\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)}_{k=3} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{(n-1)!}\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right)}_{k=n} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Es ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$. Insbesondere konvergiert die Reihe.

(b) Sei $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right) = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) - \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$. Wir erhalten

$$S_n = \underbrace{\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)}_{k=3} + \cdots +$$

$$\underbrace{\left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)}_{k=n} = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Es ist $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.
Insbesondere konvergiert die Reihe.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen (wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie / und $*$) dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email (an Ihre studentische Emailadresse) erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0 bis 2 Punkte.