A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

16. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 48. *Konvergenz von Potenzreihen*

Schreiben Sie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit geeigneten $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$.
Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt und den Konvergenzradius von $f(z)$.
Untersuchen Sie die Potenzreihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz in $z = \mathrm{i}$.

(a) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (5z - \mathrm{i})^{2k}$

(b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n}(\mathrm{i}z + 2\mathrm{i} + 1)^n$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (5z-\mathrm{i})^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 5^{2k}(z - \frac{\mathrm{i}}{5})^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = \frac{\mathrm{i}}{5}$ und Koeffizienten

$$a_n = \begin{cases} 5^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 5 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Somit ist $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 5$ und der Konvergenzradius ist $\rho = \frac{1}{5}$.

Wegen $\left|\mathrm{i} - \frac{\mathrm{i}}{5}\right| = \frac{4}{5} > \rho$ ist die Reihe f im Punkt i divergent.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n}(\mathrm{i}z + 2\mathrm{i} + 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{n2^n}(z + 2 - \mathrm{i})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}(z+2-\mathrm{i})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = -2 + \mathrm{i}$ und Koeffizienten

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{(-1)^n}{n2^n} & \text{für } n \neq 0 \end{cases} .$$

Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} & \text{für } n \neq 0 \end{cases} .$$

Somit ist $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$ und der Konvergenzradius ist $\rho = 2$.
Wegen $|\mathrm{i} - (-2+\mathrm{i})| = 2 = \rho$ lässt sich mittels des Konvergenzradius keine Aussage über die Konvergenz treffen. Daher betrachten wir

$$f(\mathrm{i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n}(2\mathrm{i})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \; .$$

Diese Reihe ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, jedoch nicht absolut konvergent, da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Aufgabe H 49. *Formel von Euler und de Moivre*
Schreiben Sie $f(x)$ jeweils als Linearkombination von Funktionen der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie sodann $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(nx)$ und $\cos(mx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) $f(x) = (\cos(3x))^4 \sin(6x)$

(b) $f(x) = \cos(2x)\,(\sin(x))^2 + (\cos(5x))^3 + (\cos(x))^2 \cos(2x)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\cos(3x))^4 \sin(6x) \\
&= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}}{2}\right)^4 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}12x} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} + 6 + 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}12x}\right) \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}\right) \\
&= \frac{1}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}18x} + \frac{4}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}12x} + \frac{5}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} - \frac{5}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x} - \frac{4}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}12x} - \frac{1}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}18x} \\
&= \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}18x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}18x}\right) + \frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}12x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}12x}\right) + \frac{5}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}\right) \\
&= \frac{1}{16}\sin(18x) + \frac{1}{4}\sin(12x) + \frac{5}{16}\sin(6x) \; .
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(2x)\,(\sin(x))^2 + (\cos(5x))^3 + (\cos(x))^2\cos(2x) \\
&= \cos(2x)\left((\sin(x))^2 + (\cos(x))^2\right) + (\cos(5x))^3 \\
&= \cos(2x) + (\cos(5x))^3 \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}}{2} + \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}15x} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}15x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}\right) + \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}15x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}15x}\right) + \frac{3}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x}\right) \\
&= \cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(15x) + \frac{3}{4}\cos(5x) \; .
\end{aligned}$$

Aufgabe H 50. *Ableitungen*

(a) Sei $a \in (0,+\infty)$. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-a)\ln(x)$$

an der Stelle $x_0 = a$ mittels des Differenzenquotienten.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden reellwertigen Funktionen jeweils ein maximales Intervall auf dem sie durch die gegebenen Terme definiert sind.
Berechnen Sie die Ableitungen mittels der Regeln aus **2.2.1**, **2.2.3** und **2.2.5**:
(i) $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(x^2\right)$ **(ii)** $h(x) = (x+5)^x$ **(iii)** $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin(x)\cos(x)+1}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\ln(x)-0}{x-a} = \lim_{x\to a} \ln(x) = \ln(a)\ .$$

(b) **(i)** Die Funktion g ist definiert auf ganz $\mathbb{R}$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(x^2\right)$. Die Ableitung erhält man mittels Anwendung der Produkt- und der Kettenregel:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\left(x^2\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(x^2\right)\cdot 2x \\ &= 2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(x^2\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(x^2\right)\ . \end{aligned}$$

(ii) Die Funktion h ist definiert auf $(-5,+\infty)$; $h:(-5,+\infty)\to\mathbb{R}: x\mapsto (x+5)^x = \mathrm{e}^{x\ln(x+5)}$. Die Ableitung erhält man mittels Anwendung der Produkt- und der Kettenregel:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\mathrm{e}^{x\ln(x+5)} = \mathrm{e}^{x\ln(x+5)}\cdot\left(\ln(x+5)+\frac{x}{x+5}\right) \\ &= (x+5)^x\cdot\left(\frac{x}{x+5}+\ln(x+5)\right)\ . \end{aligned}$$

(iii) Die Funktion j ist definiert auf $[0,+\infty)$; $j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\sin(x)\cos(x)+1}$.
Die Ableitung erhält man mittels Anwendung der Produkt- und der Quotientenregel: Hierfür gibt es folgende 2 Varianten:

1. Variante Man bestimmt die Ableitung von j direkt über die angegebene Form.

$$\begin{aligned} j'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(\sin(x)\cos(x)+1)+\sqrt{x}\cdot(-\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\sin(x)}{(\sin(x)\cos(x)+1)^2} \\ &= \frac{\sin(x)\cos(x)+1-2x\,(\cos(x))^2+2x\,(\sin(x))^2}{2\sqrt{x}\,(\sin(x)\cos(x)+1)^2}\ . \end{aligned}$$

2. Variante Man verwendet zunächst das Additionstheorem $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ und erhält somit die Darstellung $j(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sin(2x)+2}$ für j. Diese leitet man nun ab:

$$j'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(\sin(2x)+2) - 2\sqrt{x}\,(2\cos(2x))}{(\sin(2x)+2)^2} = \frac{\sin(2x)-4x\cos(2x)+2}{\sqrt{x}(\sin(2x)+2)^2}$$

Aufgabe H 51. *Kettenregel*

(a) Differenzieren Sie $\left((\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\right)(\exp(\sin(x^3 - 17x^2 + \cos(9x))))$.

(b) Es bezeichnen $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktionen $g(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 2$ und $h(x) = x^5 + 2x^3 + x$.
Bestimmen Sie die Nullstellen der Ableitung von $h \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto h(g(x))$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man erhält die Ableitung durch mehrfache Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\underbrace{\left((\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\right)}_{=1}\left(\exp\left(\sin\left(x^3 - 17x^2 + \cos(9x)\right)\right)\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\mathrm{e}^{\sin\left(x^3-17x^2+\cos(9x)\right)}\\
&= \mathrm{e}^{\sin\left(x^3-17x^2+\cos(9x)\right)} \cdot \cos\left(x^3 - 17x^2 + \cos(9x)\right) \cdot \left(3x^2 - 34x - \sin(9x)\cdot 9\right)\\
&= \left(3x^2 - 34x - 9\sin(9x)\right) \cdot \cos\left(x^3 - 17x^2 + \cos(9x)\right) \cdot \mathrm{e}^{\sin\left(x^3-17x^2+\cos(9x)\right)}\ .
\end{aligned}$$

(b) Es gilt $(h \circ g)'(x) = (h' \circ g)(x) \cdot g'(x)$. Somit sind die Nullstellen von $(h \circ g)'$ genau die Nullstellen von $h' \circ g$ und $g'(x)$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 4\left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)\ ,\\
h'(x) &= 5x^4 + 6x^2 + 1\ .
\end{aligned}$$

Somit gilt $h'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere folgt $(h' \circ g)(x) = h'(g(x)) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also besitzt $h' \circ g$ keine Nullstellen. Für die Nullstellen von g' sehen wir, dass $1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 0$ und erhalten mittels Polynomdivision und der Mitternachtsformel

$$\begin{aligned}
4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 4\left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right) &= 4(x-1)\left(x^2 - 2x - 3\right)\\
&= 4(x-1)(x+1)(x-3)\ .
\end{aligned}$$

Also besitzt g' die Nullstellen $-1, 1$ und 3 und nach Obigem besitzt die Ableitung von $h \circ g$ genau die gleichen Nullstellen.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 3.5.–9.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/