Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 52. *Ableitungen*

Sei die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \arctan(x)\ln(x)$.

(a) Bestimmen Sie die maximale Teilmenge $D \subseteqq \mathbb{R}$, auf der f durch diesen Funktionsterm definiert werden kann.

(b) Wo ist f differenzierbar?

(c) Berechnen Sie f' und f''.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Wurzelfunktion ist auf $[0,+\infty)$ definiert, darum muss $x^2-4 \geqq 0$ sein. Diese letzte Funktion ist gleich null für $x=-2$ und $x=2$ und ist $\geqq 0$, wenn $x \leqq -2$ oder $x \geqq 2$. Darum ist die Verkettung $\sqrt{x^2-4}$ auf $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$ definiert.

Die Logarithmusfunktion ist auf $(0,+\infty)$ definiert, darum muss $x>0$ sein.

Der Definitionsbereich von $\arctan$ ist $\mathbb{R}$.

Deswegen ist $D = [2,+\infty)$ die maximale Teilmenge, auf der f durch $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \arctan(x)\ln(x)$ definiert werden kann.

(b) Die Verkettung $\sqrt{x^2-4}$ ist auf $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$ definiert. Aber, da die Wurzelfunktion an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist, müssen wir die Punkte herausnehmen, an denen x^2-4 null ist. Das heißt, die Verkettung $\sqrt{x^2-4}$ ist nur auf $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ differenzierbar.

Tatsächlich sind die Logarithmusfunktion und $\arctan$ Funktionen auf ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar.

Darum ist die Funktion f auf dem Bereich $(2,+\infty)$ differenzierbar.

(c) Die Ableitung von f ist:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-4}} + \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(x) + \arctan(x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= x(x^2-4)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{\arctan(x)}{x}. \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung von f ist:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^2-4)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x}{2} \cdot 2x(x^2-4)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad + \frac{\frac{1}{x}\cdot(1+x^2) - \ln(x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} + \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2} \\ &= (x^2-4)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2-4)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x(1+x^2)} \\ &\quad - \frac{\ln(x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\arctan(x)}{x^2} \\ &= -4(x^2-4)^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{x(1+x^2)} - \frac{\ln(x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} - \frac{\arctan(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 53. *Ableitungen einer Funktionsschar*

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{2x^2 + x}{x^2 + d}$ mit $d > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von h.

(b) Bestimmen Sie das Verhalten von h und h' für x gegen $\pm\infty$.

(c) Bestimmen Sie für h' die Bereiche mit positiven bzw. negativen Funktionswerten.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Ableitung von f ergibt sich mittels der Quotientenregel:

$$h'(x) = \frac{(4x+1) \cdot (x^2 + d) - (2x^2 + x) \cdot 2x}{(x^2 + d)^2} = \frac{-x^2 + 4dx + d}{(x^2 + d)^2} .$$

(b) Es ist

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{d}{x^2}} = 2$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} h'(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 + \frac{4d}{x} + \frac{d}{x^2}}{\left(1 + \frac{d}{x^2}\right)^2} = 0 .$$

(c) Zunächst bestimmen wir die Nullstellen von h' mit der Mitternachtsformel:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4dx + d \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-4d \pm \sqrt{(4d)^2 + 4d}}{-2} = 2d \mp \sqrt{4d^2 + d} .$$

Wegen $d > 0$ ist die Diskriminante positiv$\left(4d^2 + d > 0\right)$ und somit besitzt h' immer zwei verschiedene Nullstellen. Zudem ist der Nenner von h' immer positiv $(x^2 + d > 0$, also $(x^2 + d)^2 > 0)$. Da $(x^2 + d)^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} -x^2 + 4dx + d = -\infty$, gilt, besitzt h' auf den Intervallen $(-\infty, 2d - \sqrt{4d^2 + d})$ und $(2d + \sqrt{4d^2 + d}, +\infty)$ negative Funktionswerte und auf dem Intervall $(2d - \sqrt{4d^2 + d}, 2d + \sqrt{4d^2 + d})$ positive Funktionswerte.

Bemerkung: Als alternative Begründung zur Grenzwertbetrachtung kann hierfür auch verwendet werden, dass der Zähler von h' eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Aufgabe H 54. *Differenzierbarkeit und Tangente*

Sei $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ ein Parameterpaar mit $p \in (-2, 2)$.
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x}} + m & \text{für } x \leqq 0 \\ \dfrac{2}{x^2 + px + 1} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $(m, p) \in \{(1, 0), (0, -1)\}$.

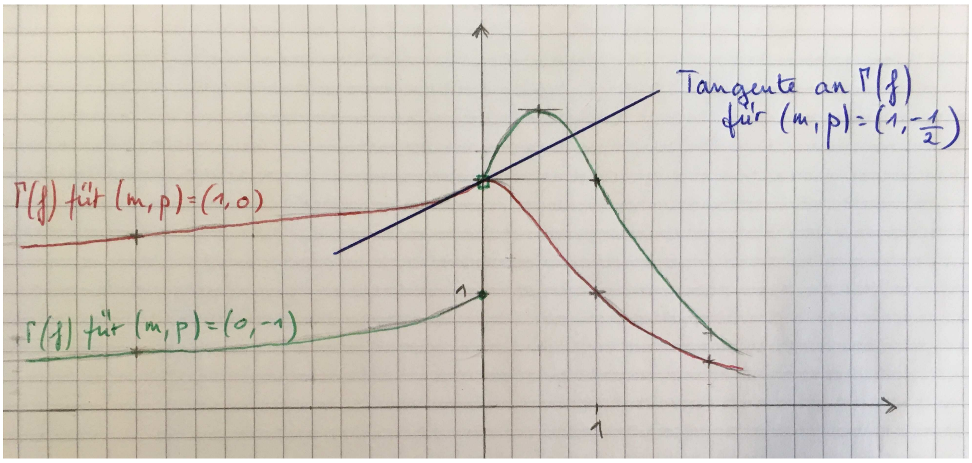
(b) Für welche Parameterpaare (m, p) ist f an der Stelle 0 stetig?

(c) Für welche Parameterpaare (m, p) ist f an der Stelle 0 differenzierbar?

(d) Bestimmen Sie für den in **(c)** bestimmten Wert von (m, p) die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle 0. Skizzieren Sie diese Tangente an den Graphen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Hier sind die Skizze.



(b) Auf $(-\infty, 0)$ und $(0, +\infty)$ ist f durch die Verknüpfung von Funktionen definiert, die auf ihrem gesamten Definitionsbereich auch stetig sind. Deswegen ist die Funktion f auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig. Wir berechnen dann die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f an der Stelle 0:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} + m = 1 + m = f(0)$$

und

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{2}{x^2+px+1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Die Funktion f ist an der Stelle 0 stetig nur wenn beide Grenzwerte den gleichen Wert $f(0)$ haben, das heißt, nur für $m = 1$ ist f auch an der Stelle 0 stetig.

(c) Die erste Bedingung an die Funktion f um an der Stelle 0 differenzierbar zu sein ist, dass sie an der Stelle 0 stetig ist. Folglich muss $m = 1$ gelten. Dann ist die Funktion f an der Stelle 0 differenzierbar wenn die links- und rechtsseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten an der Stelle 0 existieren und dieselben sind. So berechnen wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0-0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}+1-2}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x}{x\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x\to 0-0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{2}{x^2+px+1}-2}{x} \\ &= \lim_{x\to 0+0} \frac{-2x^2-2px}{x(x^2+px+1)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{-2x-2p}{x^2+px+1} = -2p.\end{aligned}$$

Das heißt, f ist an der Stelle 0 differenzierbar, falls $m = 1$ und $p = -\frac{1}{4}$ gilt.

(d) Die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle 0 ist dann $y = f'(0)\cdot(x-0)+f(0)$, das heißt

$$y = \frac{x}{2} + 2.$$

Aufgabe H 55. *Ableitung der Umkehrfunktion*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (\cosh(x))^{\sin(x)}$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(b) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wächst und bestimmen Sie damit ein Intervall $I \subseteqq \mathbb{R}$ so, dass $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to I$ bijektiv ist.

(c) Nach Aufgabenteil **(b)** gibt es eine Umkehrfunktion $f^{-1} : I \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ zu f. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangenten an den Graphen von f^{-1} im Punkt $\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right)$.

Gibt es eine Tangente an den Graphen von f^{-1} im Punkt $(1, 0)$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zur Bestimmung der Ableitung schreiben wir f als natrürliche Exponentialfunktion und wenden die Ketten und die Produktregel an:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \mathrm{e}^{\sin(x)\ln(\cosh(x))} = \mathrm{e}^{\sin(x)\ln(\cosh(x))} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(\cosh(x)) + \sin(x) \cdot \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) \\
&= \left(\cos(x)\ln(\cosh(x)) + \frac{\sin(x)\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)(\cosh(x))^{\sin(x)} .
\end{aligned}
$$

(b) Zum Nachweis der Monotonie gibt es zwei Lösungsvarianten:

1. Variante Wir verwenden die Ableitung f' und zeigen, dass diese immer positiv ist (außer eventuell in den Randpunkten 0 und $\frac{\pi}{2}$: Sei $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Dann gilt $\cos(x) > 0$, $\cosh(x) > 1$, $\sin(x) > 0$, $\sinh(x) > 0$ und es folgt

$$
f'(x) = \left(\underbrace{\cos(x)}_{>0}\underbrace{\ln(\cosh(x))}_{>0} + \underbrace{\frac{\sin(x)\sinh(x)}{\cosh(x)}}_{>0}\right)\underbrace{(\cosh(x))^{\sin(x)}}_{>0} > 0
$$

Somit ist f streng monoton wachsend.

2. Variante Wir verwenden die Definition von streng monoton wachsend: Seien $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit $a < b$. Dann gilt $1 \leqq \cosh(a) < \cosh(b)$ und $0 \leqq \sin(a) < \sin(b)$, da $\cosh(0) = 1$, $\sin(0) = 0$ und $\cosh$ und $\sin$ auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsen. Damit folgt

$$
(\cosh(a))^{\sin(a)} \overset{(1)}{\leqq} (\cosh(b))^{\sin(a)} \overset{(2)}{<} (\cosh(b))^{\sin(b)} .
$$

Dabei gilt in (1) Gleichheit genau dann, wenn $a = 0$ ist. In (2) ist keine Gleichheit möglich, da $\cosh(b) > 1$ gilt. Somit haben wir die strenge Monotonie von f nachgewiesen.

Nun gilt $f(0) = 1$ und $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Somit ist $I = \left[1, \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ das gesuchte Intervall.

(c) Es ist $(f^{-1})'\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ die Steigung der Tangenten. Diese berechnen wir mittels Satz 2.3.1. Weiter ist $f^{-1}\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$ und

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0 + \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

und damit

$$f^{-1}\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)} .$$

Damit erhalten wir die Tangente

$$t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(x - \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cdot x + \frac{\pi}{2} - \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)} .$$

Es ist $f^{-1}(1) = 0$ und $f'(0) = 0$. Somit lässt sich die Ableitung von f^{-1} an der Stelle 1 nicht mit Satz 2.3.1 bestimmen. Genauer ist f^{-1} in 1 nicht differenzierbar und hat eine senkrechte Tangente (es gilt $\lim\limits_{x\to 1}\left|(f^{-1})'(x)\right| = +\infty$). Diese senkrechte Tangente wird durch die Gleichung $x = 1$ beschrieben.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 10.5.–16.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/