A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

20. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 64. *Partialbruchzerlegung und Integration*
Sei
$$f(x) = \frac{x^5 + 11x^3 + 2x^2 + 17x - 21}{x^3 - x^2 + 9x - 9}.$$

(a) Führen Sie die reelle Partialbruchzerlegung von f aus (notfalls nach Polynomdivision mit Rest).

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Erst führt man die Polynomdivision durch:

$$\begin{aligned} x^5 + 11x^3 + 2x^2 + 17x - 21 &= x^2(x^3 - x^2 + 9x - 9) + x^4 + 2x^3 + 11x^2 + 17x - 21 \\ &= (x^2 + x)(x^3 - x^2 + 9x - 9) + 3x^3 + 2x^2 + 26x - 21 \\ &= (x^2 + x + 3)(x^3 - x^2 + 9x - 9) + 5x^2 - x + 6. \end{aligned}$$

Daraus folgt
$$f(x) = x^2 + x + 3 + \frac{5x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 + 9x - 9}.$$

Da $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9)$ sieht die reelle Partialbruchzerlegung wie folgt aus
$$\frac{5x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 + 9x - 9} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + 9}$$
mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Also gilt
$$5x^2 - x + 6 = a(x^2 + 9) + (bx + c)(x - 1).$$

Für $x = 1$ erhalten wir
$$10 = 10a,$$
d.h. $a = 1$. Für $x = 0$ erhalten wir
$$6 = 9a - c = 9 - c,$$
d.h. $c = 3$. Schließlich setzen wir $x = -1$ (zum Beispiel) und erhalten
$$12 = 10a + 2b - 2c = 4 + 2b.$$

Daraus folgt $b = 4$ und
$$f(x) = x^2 + x + 3 + \frac{1}{x - 1} + \frac{4x + 3}{x^2 + 9}.$$

Beachten Sie, dass man auch das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} a + b &= 5 \\ -b + c &= -1 \\ 9a - c &= 6 \end{aligned}$$
lösen kann, um die Konstanten a, b und c zu bestimmen.

(b) Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int x^2+x+3+\frac{1}{x-1}+\frac{4x+3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+\ln|x-1|+\int \frac{4x}{x^2+9}+\frac{3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+\ln|x-1|+\int 2\cdot\frac{2x}{x^2+9}+\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+\ln|x-1|+2\ln|x^2+9|+\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c,
\end{aligned}
$$

mit $c\in\mathbb{R}$. Also ist

$$
F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+\ln|x-1|+2\ln(x^2+9)+\arctan\left(\frac{x}{3}\right)
$$

eine Stammfunktion von f. (Merken Sie, dass x^2+9 immer positiv ist.)

Aufgabe H 65. *Partialbruchzerlegung und Integration*
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{x-10}{x^2+x-12}\,\mathrm{d}x.$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir führen erst die reelle Partialbruchzerlegung durch:

$$
\frac{x^2}{(x-2)^3}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x-2)^2}+\frac{c}{(x-2)^3}.
$$

Also gilt

$$
x^2=a(x-2)^2+b(x-2)+c.
$$

Für $x=2$ erhalten wir $4=c$. Damit ergibt sich

$$
x^2=ax^2+(b-4a)x+(4a-2b+4).
$$

Es folgt $a=1$ und $4a-2b+4=0$, also $b=4$ und wir erhalten

$$
\frac{x^2}{(x-2)^3}=\frac{1}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}+\frac{4}{(x-2)^3}.
$$

Das Integral ist dann

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}+\frac{4}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}\right].
\end{aligned}
$$

(b) Wir führen erst die reelle Partialbruchzerlegung durch. Da $x^2+x-12=(x+4)(x-3)$ gilt, verwenden wir den folgenden Ansatz:

$$\frac{x-10}{x^2+x-12}=\frac{a}{x+4}+\frac{b}{x-3}.$$

Also gilt

$$x-10=a(x-3)+b(x+4).$$

Für $x=-4$ erhalten wir

$$-14=-7a,$$

d.h. $a=2$, und für $x=3$ erhalten wir

$$-7=7b,$$

d.h. $b=-1$. Das Integral ist dann

$$\begin{aligned}\int \frac{x-10}{x^2+x-12}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{x+4}-\frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[2\ln|x+4|-\ln|x-3|\right].\end{aligned}$$

Aufgabe H 66. *Obersumme und Untersumme*

Sei $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \dfrac{8-x^3}{1+x^2}$.

(a) Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung der Ableitung f' und finden Sie das Maximum von f. Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Wir betrachten die Partition $Q=\left\{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\}$ des Intervalls $[-1,1]$.
Stellen Sie die Obersumme $\overline{S}(f,Q)$ graphisch als Flächeninhalt dar.
Berechnen Sie $\underline{S}(f,Q)$ und $\overline{S}(f,Q)$.

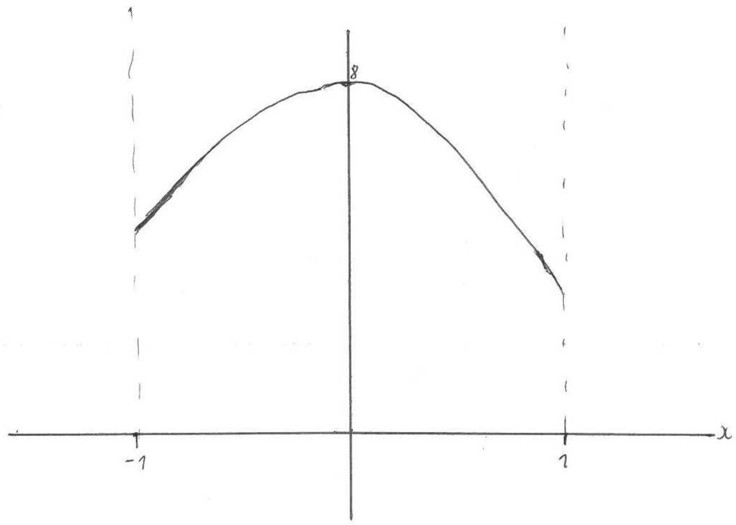
(d) Schließen Sie daraus eine obere und eine untere Schranke für den Wert von π.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-3x^2\cdot(1+x)^2-(8-x^3)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{-x^4-3x^2-16x}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{-x(x^3+3x+16)}{(1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

Auf $[-1,1]$ ist $(1+x^2)^2>0$ und $x^3+3x+16 \geqq (-1)^3+3(-1)+16=12>0$. Also ist die Vorzeichenverteilung von f' gleich wie die von $-x$, d.h. $f'(x)>0$ für $x<0$, $f'(0)=0$, und $f'(x)<0$ für $x>0$. Daraus folgt, dass das Maximum von f ist $f(0)=8$. Hier die Skizze:



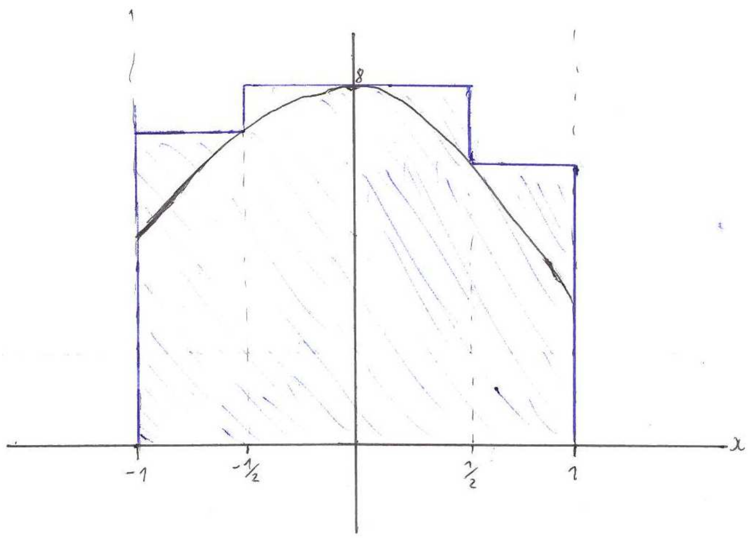
(b) Polynomdivision gibt

$$-x^3 + 8 = -x(x^2+1) + x + 8,$$

also ist

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{8-x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} -x + \frac{x+8}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} -x + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} + 8\cdot\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + 8\arctan(x)\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) + 8\arctan(1)\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) + 8\arctan(-1)\right) \\
&= 8\arctan(1) - 8\arctan(-1) \\
&= 8\cdot\frac{\pi}{4} - 8\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

(c) $\overline{S}(f,Q)$ ist die folgende Flächeninhalt



Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,Q) &= \left(-\frac{1}{2}+1\right) f(-1) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right) f(1) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2} + 1\cdot\frac{63}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2} \\
&= \frac{103}{10}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,Q) &= \left(-\frac{1}{2}+1\right) f\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) f(0) + \left(1-\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{2} + 1\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot\frac{63}{10} \\
&= \frac{72}{5}.
\end{aligned}$$

(d) Wir haben

$$\underline{S}(f,Q) = \frac{103}{10} \leqq \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4\pi \leqq \frac{72}{5} = \overline{S}(f,Q),$$

also ist

$$2{,}575 = \frac{103}{40} \leqq \pi \leqq \frac{18}{5} = 3{,}6.$$

Aufgabe H 67. *Integrale und Flächeninhalte*

Die Funktionen $f, g, h\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$f(x) = 2\,, \qquad g(x) = |3-x| \qquad \text{und} \qquad h(x) = \sqrt{|x-1|}.$$

(a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen dieser Funktionen.

(b) Skizzieren Sie die Graphen.

(c) Skizzieren Sie die Fläche, die von den Graphen von f und g, von der Geraden $x=2$ und von der Geraden $x=4$ eingeschlossen wird.

Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. Begründen Sie das Resultat durch eine geometrische Überlegung.

(d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des krummlinig berandeten Vielecks, das von den Graphen von g und h und von der y-Achse eingeschlossen wird.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Beachten Sie, dass

$$g(x) = \begin{cases} 3-x, & x\in[0,3], \\ x-3, & x\in[3,5], \end{cases} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\in[0,1], \\ \sqrt{x-1}, & x\in[1,5]. \end{cases}$$

Wir vergleichen f und g. Auf $[0,3]$ ist $f(x)=2$ und $g(x)=3-x$, und

$$3-x=2 \iff x=1.$$

Auf $[3,5]$ ist $f(x)=2$ und $g(x)=x-3$, und

$$x-3=2 \iff x=5.$$

Also finden wir die Schnittpunkte $(1,2)$ und $(5,2)$ zwischen $\Gamma(f)$ und $\Gamma(g)$.
Jetzt vergleichen wir f und h. Auf $[0,1]$ ist $f(x)=2$ und $h(x)=\sqrt{1-x}$, und

$$\sqrt{1-x}=2 \iff 1-x=4 \iff x=-3,$$

was unmöglich ist ($-3\notin[0,1]$). Auf $[1,5]$ ist $f(x)=2$ und $h(x)=\sqrt{x-1}$, und

$$\sqrt{x-1}=2 \iff x-1=4 \iff x=5.$$

Also finden wir nur den Schnittpunkt $(5,2)$ zwischen $\Gamma(f)$ und $\Gamma(h)$.
Schließlich vergleichen wir g und h. Auf $[0,1]$ ist $g(x)=3-x$ und $h(x)=\sqrt{1-x}$, und

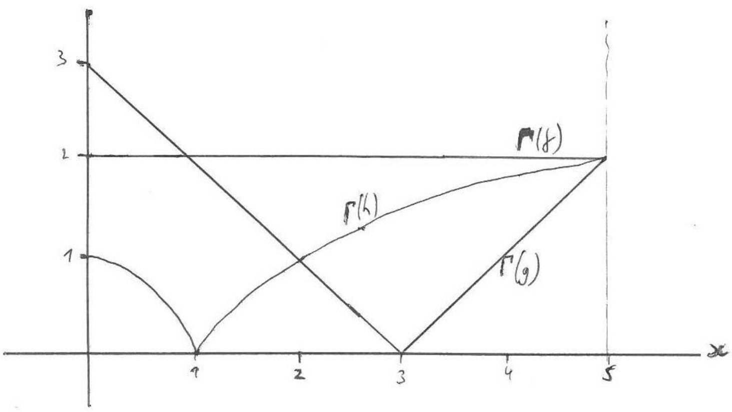
$$\sqrt{1-x}=3-x \iff 1-x=9-6x+x^2 \iff x^2-5x+8=0.$$

Die Diskriminante dieses Polynoms ist -7, also gibt es keine reelle Lösung. Auf $[1,5]$ ist $g(x)=|3-x|$ und $h(x)=\sqrt{x-1}$, und

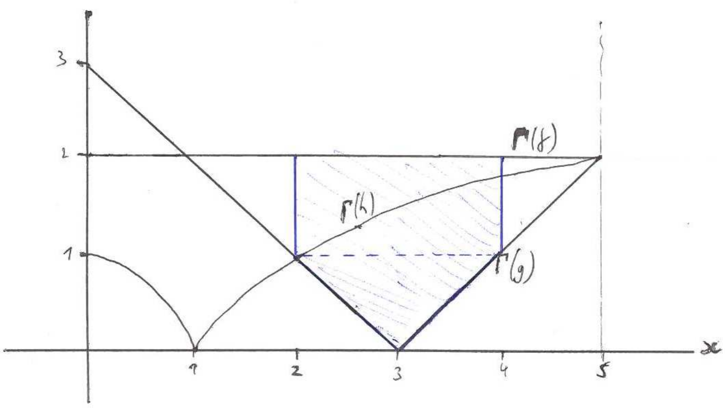
$$\sqrt{x-1}=|3-x| \iff x-1=9-6x+x^2 \iff x^2-7x+10=0,$$

also erhalten wir die Lösungen $x=2$ und $x=5$. Wir erhalten dann die Schnittpunkte $(2,1)$ und $(5,2)$ zwischen $\Gamma(g)$ und $\Gamma(h)$.
Alle zusammen sind die Schnittpunkte $(1,2)$, $(5,2)$ und $(2,1)$.

(b) Hier die Skizze:



(c) Die Skizze von der Fläche ist die folgende.



Der Inhalt ist der des Vierecks mit Ecken $(2,1)$, $(4,1)$, $(2,2)$ und $(4,2)$, zusammen mit der des Dreiecks mit Ecken $(2,1)$, $(4,1)$ und $(3,0)$. Also ist dieser Inhalt

$$(2 \times 1) + \frac{1}{2}(1 \times 2) = 2 + 1 = 3.$$

(d) Beachten Sie, dass $g(x) - h(x) \geqq 0$ auf $[0,2]$, und $g(x) - h(x) \leqq 0$ auf $[2,4]$. Also bestimmen wir den gesuchten Inhalt durch

$$I = \int_0^2 g(x) - h(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 h(x) - g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mit Beachtung der Definitionen von g und h, berechnen wir das Integral durch

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 3 - x - \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 3 - x - \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_2^3 \sqrt{x-1} - (3-x)\,\mathrm{d}x + \int_3^5 \sqrt{x-1} - (x-3)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[3x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 \\
&\qquad + \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - 3x + \frac{x^2}{2}\right]_2^3 + \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_3^5 \\
&= \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{9}{2} - \left(-\frac{10}{3}\right)\right) + \left(\frac{47}{6} - \left(\frac{9}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\right) \\
&= \frac{29}{6}.
\end{aligned}$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/