Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 72. *Potenzreihen: geschlossene Darstellung*

Wir betrachten die durch eine Potenzreihe gegebene Funktion

$$f\colon (3-\rho, 3+\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(2x-6)^k.$$

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ.

(b) Finden Sie eine Reihendarstellung für die Ableitung f' von f.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir schreiben

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot 2^k \cdot (x-3)^k,$$

also ist $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k (x-3)^k$ mit $a_k = \dfrac{(-2)^k}{k}$. Dann haben wir

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| -2\frac{k}{k+1} \right| = 2,$$

also ist $\rho = \frac{1}{2}$.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot 2k(2x-6)^{k-1} \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2x-6)^{k-1}. \end{aligned}$$

(c) Die Reihe

$$f'(x) = -2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}(2x-6)^{k-1} = -2\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell}(2x-6)^{\ell}$$

ist eine geometrische Reihe, sodass

$$f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{1-(-1)(2x-6)} = \frac{2}{5-2x}.$$

(d) Die Abbildung f ist die eindeutige Stammfunktion von f' mit der Eigenschaft $f(3) = 0$. Eine allgemeine Stammfunktion ist in der Klasse

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{2}{5-2x}\,\mathrm{d}\,x = [-\ln|5-2x|].$$

Wegen $-\ln|5-2\cdot 3| = -\ln(1) = 0$ ist $f(x) = -\ln|5-2x|$. Man kann noch bemerken, dass $5-2x < 0$ für $x \in (3-\rho, 3+\rho) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ gilt. Also ist $f(x) = -\ln(2x-5)$.

Aufgabe H 73. *Funktion in mehreren Veränderlichen*
Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\neq -y\right\} \to \mathbb{R}\colon (x,y)\mapsto \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

(a) Zeichnen Sie in ein gemeinsames Koordinatensystem die Niveaulinien N_t von f zum Niveau t für $t\in\{-4,-2,2,4\}$.

(b) Bestimmen Sie den achsenparallelen Schnitt $\left\{(x,\frac{1}{2},f(x,\frac{1}{2})) \,\middle|\, x\in\mathbb{R}, x\neq -\frac{1}{2}\right\}$ von f.

(c) Skizzieren Sie diesen Schnitt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für die Niveaulinien N_2 führen wir folgende Rechnung für $x\neq -y$ durch.

$$\begin{aligned} f(x,y)=2 &\Leftrightarrow x^2-2x-2y+y^2=0\\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+1-2y+y^2-2=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2 \end{aligned}$$

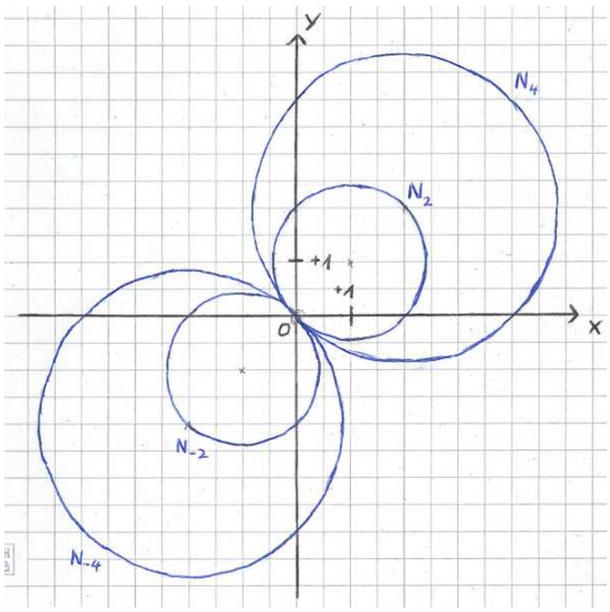
Für die Niveaulinien N_4 führen wir folgende Rechnung für $x\neq -y$ durch.

$$\begin{aligned} f(x,y)=4 &\Leftrightarrow x^2-4x-4y+y^2=0\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4+4-4y+y^2-8=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=8 \end{aligned}$$

Analog rechnen wir für N_{-2} und N_{-4}:

$$\begin{aligned} f(x,y)=-2 &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=2\\ f(x,y)=-4 &\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+2)^2=8 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgende Skizze für die Niveaulinien. Der Punkt $(0,0)$ ist nicht im Definitionsbereich enthalten und daher auch kein Element der Niveaulinien.



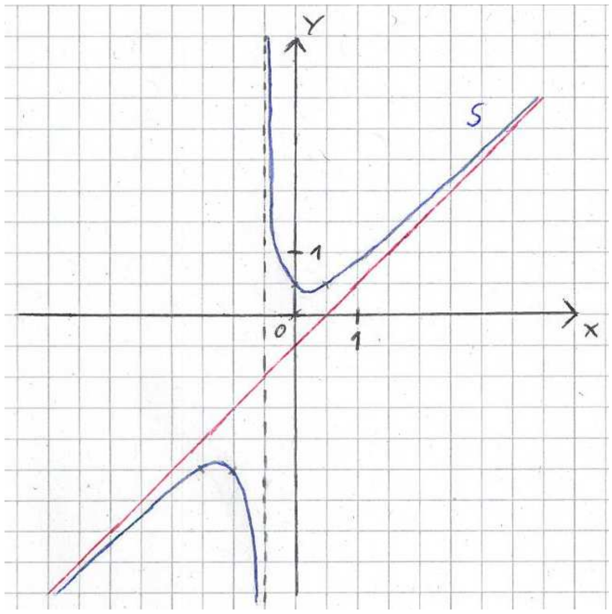
(b) Für den achsenparallelen Schnitt führen wir folgende Rechnung für $x \neq -\frac{1}{2}$ mittels Polynomdivision durch.

$$\frac{x^2+\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{4x^2+1}{4x+2} = x - \frac{1}{2} + \frac{2}{4x+2} = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x+1}$$

Damit ist der achsenparallelen Schnitt gegeben durch

$$\left\{ (x, \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x+1}) \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\, x \neq -\frac{1}{2} \right\}.$$

(c) Nach Teil (b) müssen wir die Menge $S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x+1},\, x \neq -\frac{1}{2} \right\}$ zeichnen. Mit rot ist außerdem die Menge $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x - \frac{1}{2} \right\}$ eingezeichnet.



Aufgabe H 74. *Modell: Unstetigkeit*
Wir betrachten die Funktion f von **Aufgabe P 69**.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Das in der Präsenzübung benutzte Modell des Graphen von f finden Sie auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/04

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x, \lambda x)$ stetig?

(b) Sei $a_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right)$. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$. Ist f bei $(0,0)$ stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$g(x) = f(x, \lambda(x)) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0, \\ \dfrac{2\lambda^2 x^3}{x^2+\lambda^4 x^4}, & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Also ist für $x \neq 0$

$$g(x) = \frac{2\lambda^2 x}{1 + \lambda^4 x^2}$$

stetig, als ein Quotient von stetigen Abbildungen ungleich Null. Da $\lim\limits_{x \to 0} 2\lambda^2 x = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0}(1 + \lambda^4 x^4) = 1$, ist g auch im Punkt 0 stetig.

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0).$$

Wir fassen zusammen, dass g für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Wegen $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, ist $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = (0, 0)$. Wir berechnen

$$f(a_n) = \frac{2 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = 1,$$

also ist $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = 1$. Das ist nicht gleich $f\left(\lim\limits_{n \to \infty} a_n\right) = f(0, 0) = 0$, also ist f nicht stetig in $(0, 0)$.

Aufgabe H 75. *Modell: Funktion in mehreren Veränderlichen*

Wir betrachten die Funktion f von **Aufgabe P 69** und **Aufgabe H 74** und dazu die Funktionenschar $g_r \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto f(x, r)$ (mit $r \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$). Den Graphen von g_r kann man jeweils sehen als den Schnitt der Ebene $E \colon y = r$ mit dem Graphen von f.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von g_2.

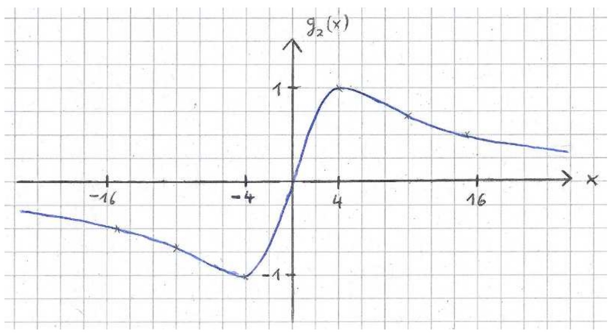
(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von g_r und deren Funktionswerte in Abhängigkeit von r.

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} g_r(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} g_r(x)$.

(d) Bestimmen Sie jeweils den größten und kleinsten Wert, den f auf $\mathbb{R}^2$ annimmt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir skizzieren $g_2(x) = f(x, 2) = \dfrac{8x}{x^2 + 16}$.



(b) Wir bestimmen die Ableitung von $g_r(x)$ in Abhängigkeit von r.

$$g_r'(x) = \frac{2r^2(x^2 + r^4) - 4x^2 r^2}{(x^2 + r^4)^2} = \frac{2r^6 - 2x^2 r^2}{(x^2 + r^4)^2}$$

Die kritischen Stellen von g_r sind dann die Lösungen der Gleichung $g_r'(x) = 0$. Wegen $r \neq 0$ gilt

$$g_r'(x) = 0 \Leftrightarrow 2r^6 - 2x^2 r^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = r^4$$

Damit sind die kritischen Stellen von g_r gegeben durch $x_1 = r^2$ und $x_2 = -r^2$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} g_r(r^2) &= \frac{2r^4}{r^4 + r^4} = 1 \\ g_r(-r^2) &= \frac{-2r^4}{r^4 + r^4} = -1. \end{aligned}$$

(c) Wir erhalten mit Satz 1.11.8.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} g_r(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2xr^2}{x^2 + r^4} = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} g_r(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{2xr^2}{x^2 + r^4} = 0. \end{aligned}$$

(d) Sei zuerst $y = 0$. Dann ist $f(x, y) = f(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Wir betrachten den Fall $y \neq 0$ mit Hilfe der Funktionenschar g_r für $r = y$. Wegen $r \neq 0$ ist $g_r(x)$ stetig. Nach Teil (b) ist

$$g_r'(x) = \frac{2r^6 - 2x^2r^2}{(x^2 + r^4)^2}.$$

Wegen $r \neq 0$ ist $2r^2 > 0$ und $(x^2 + r^4)^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir die folgende Vorzeichenverteilung der Ableitung von g_r.

$$\begin{aligned} g_r'(x) &< 0, && x < -r^2 \\ g_r'(x) &> 0, && -r^2 < x < r^2 \\ g_r'(x) &< 0, && r^2 < x \end{aligned}$$

Also besitzt g_r an der Stelle $x = -r^2$ ein lokales Minimum und an der Stelle $x = r^2$ ein lokales Maximum. Wegen der Stetigkeit von g_r und da

$$g_r(-r^2) < \lim_{x \to +\infty} g_r(x) = \lim_{x \to -\infty} g_r(x) < g_r(r^2).$$

ist daher $g_r(-r^2) = -1$ der kleinste Wert und $g_r(r^2) = 1$ der größte Wert den g_r auf $\mathbb{R}$ annimmt.
Wegen $g_r(x) = f(x, y)$ für $y \neq 0$ und wegen $f(x, 0) = 0$ ist damit auch -1 der kleinste Wert und 1 der größte Wert den f auf $\mathbb{R}^2$ annimmt.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/