Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 80. *Kritische Stellen und ihr Typ*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y^2 - x^2 - 1)\,(x^2 + (y-1)^2 - 4)$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 von f sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Rechteck $[-3,3] \times [-2,4]$.

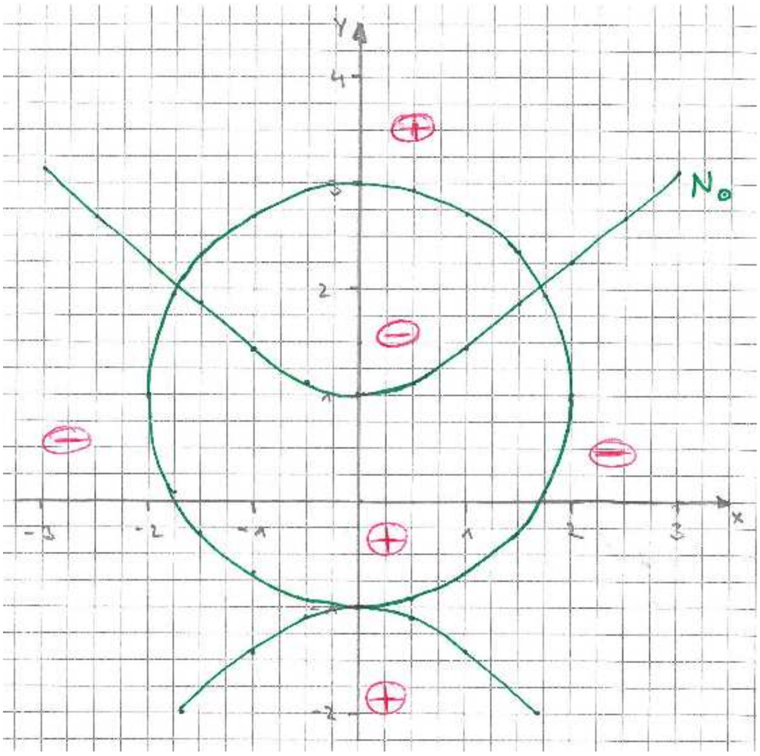
(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle ihren Typ.

Lösungshinweise hierzu:

(a) $f(x,y) = 0$ gilt genau denn, wenn $y^2 = x^2 + 1$ oder $x^2 + (y-1)^2 = 4$ gilt. Die Gleichung $y^2 = x^2 + 1$ beschreibt eine Hyperbel und die Gleichung $x^2 + (y-1)^2 = 4$ einen Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,1)$. Für Punkte oberhalb des oberen oder unterhalb des unteres Hyperbelastes ist der Term $y^2 - x^2 - 1$ positiv, zwischen den Hyperbelästen negativ. Der Term $x^2 + (y-1)^2 - 4$ ist innerhalb des Kreises negativ und außerhalb positiv. Damit ergibt sich die Vorzeichenverteilung entsprechend der nachfolgenden Skizze:



(b) Es gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x\,(x^2 - y - 1) \\ 4y^3 + 2x^2 - 6y^2 - 8y + 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 + 4y + 4 & 4x \\ 4x & 12y^2 - 12y - 8 \end{pmatrix}.$$

(c) Aus der ersten Koordinate des Gleichungssystems $\operatorname{grad} f(x, y) = 0$ erhält man die Bedingung $x = 0$ oder $x^2 - y - 1 = 0$. Daher unterscheiden wir folgende Fälle:

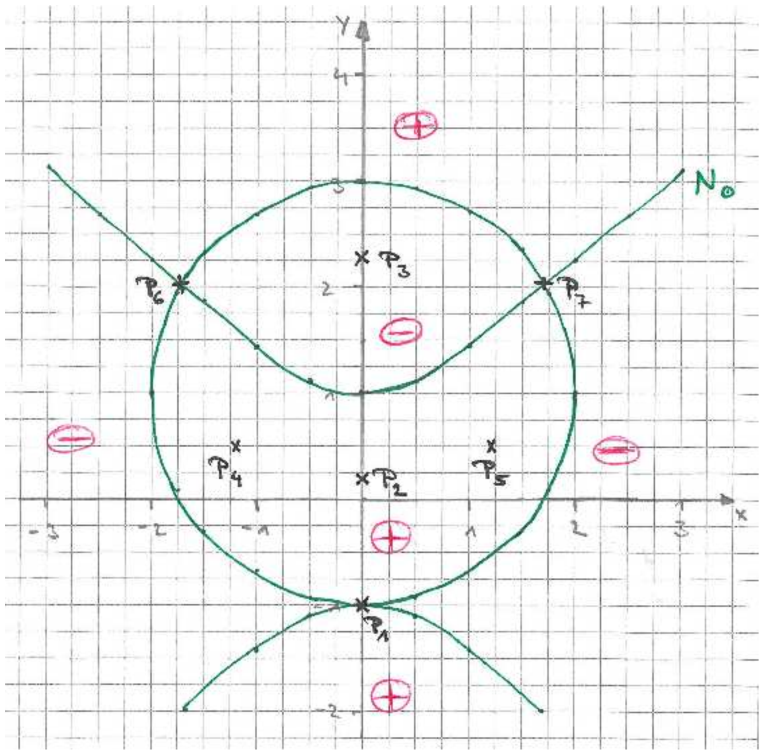
$x = 0$**:** Aus der zweiten Koordinate erhält man dann $4y^3 - 6y^2 - 8y + 2 = 0$. Mittels Einsetzen erhält man die Nullstelle $y = -1$ und durch Polynomdivision $2(y + 1)(2y^2 - 5y + 1) = 0$. Die weiteren Nullstellen $y = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$ erhalten wir mit der Mitternachtsformel.

$x \neq 0$**:** Dann gilt $x^2 = y+1$. Durch Einsetzen in die zweite Koordinate des Gleichungssystems erhält man $4y^3-6y^2-6y+4 = 0$. Man erhält wieder mittels Einsetzen die Nullstelle $y = -1$ und durch Polynomdivision $2(y + 1)(2y^2 - 5y + 2) = 0$. Die weiteren Nullstellen $y = \dfrac{5 \pm 3}{4}$ erhalten wir ebenso mit der Mitternachtsformel. Damit ergeben sich die zugehörigen x-Werte $x = 0$ zu $y = -1$ (Widerspruch zur Annahme $x \neq 0$), $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ zu $y = \dfrac{1}{2}$ und $x = \pm\sqrt{3}$ zu $y = 2$.

Damit liegen folgende kritischen Punkte der Funktion f vor:

$$P_1 = (0, -1)\ , \qquad P_2 = \left(0, \frac{5 - \sqrt{17}}{4}\right)\ , \quad P_3 = \left(0, \frac{5 + \sqrt{17}}{4}\right)\ ,$$

$$P_4 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)\ , \quad P_5 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)\ , \qquad P_6 = \left(-\sqrt{3}, 2\right)\ , \qquad P_7 = \left(\sqrt{3}, 2\right)\ .$$



(d) P_1 ist ein Sattelpunkt. Dies ist aus der Vorzeichenverteilung ersichtlich, da es sowohl positive als auch negative an P_1 angrenzende Bereiche gibt. Das gleiche gilt für P_6 und P_7.

P_3 ist ein lokales Minimum. Dies ist wieder aus der Vorzeichenverteilung mit Hilfe des Satzes vom Minimum und Maximum ersichtlich: Der in der Vorzeichenverteilung negativ gekennzeichnete Bereich, in dem P_3 liegt, zusammen mit seinem Rand ist eine kompakte Menge. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum nimmt die Funktion

f daher auf dieser Menge ihr Minimum und Maximum an. Das Maximum ist 0 und wird auf dem Rand angenommen. Das Minimum wird daher an einer kritischen Stelle im Inneren angenommen. Als einzige Möglichkeit hierfür kommt P_3 in Betracht.

Das Argument für P_3 lässt sich nicht auf P_2 übertragen, da hier im selben Bereich ebenfalls die kritischen Punkte P_4 und P_5 liegen. Für diese Punkte verwenden wir die Hesse-Matrix zur Typbestimmung:

$$\mathrm{H}f\,(P_2) = \begin{pmatrix} 9-\sqrt{17} & 0 \\ 0 & \frac{17}{2}-\frac{9\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f\,(P_4) = \begin{pmatrix} -12 & -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & -11 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{H}f\,(P_5) = \begin{pmatrix} -12 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & -11 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(\mathrm{H}f\,(P_2)) = 153 - 49\sqrt{17} < 0$ ist $\mathrm{H}f\,(P_2)$ indefinit und daher P_2 ein Sattelpunkt.

Wegen $\det(\mathrm{H}f\,(P_4)) = \det(\mathrm{H}f\,(P_5)) = 108 > 0$ und $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}f\,(P_4)) = \mathrm{Sp}(\mathrm{H}f\,(P_5)) = -23 < 0$ sind P_4 und P_5 lokale Maxima.

Aufgabe H 81. *Extremwerte unter Nebenbedingungen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2y^2 - 3y^2 + z^2 + z$ und $M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x,y,z) = 0\right\}$ mit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$.

(a) Stellen Sie das Gleichungssystem gemäß der Multiplikatormethode nach Lagrange auf.

(b) Bestimmen Sie damit die Kandidaten für die Extremstellen von f auf M.

(c) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f in M.

(d) Sei $N := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x,y,z) = 0 = h(x,y,z)\right\} \subsetneqq M$ mit $h(x,y,z) = y^2$. Bestimmen Sie den maximalen Wert, den f auf N annimmt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das Gleichunssystem ergibt sich mit $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2y - 6y \\ 2z+1 \end{pmatrix}$ und $\operatorname{grad} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 8z \end{pmatrix}$ aus $\operatorname{grad} f(x,y,z) + \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z) = 0$ und $g(x,y,z) = 0$:

$$2x\left(y^2+\lambda\right) = 0 \tag{1}$$
$$2y\left(x^2+\lambda-3\right) = 0 \tag{2}$$
$$2\,(4\lambda+1)\,z + 1 = 0 \tag{3}$$
$$x^2+y^2+4z^2 = 4 \tag{4}$$

(b) Aus (1) folgt $x = 0$ oder $\lambda = -y^2$. Aus (2) folgt $y = 0$ oder $\lambda = 3 - x^2$. Daraus ergeben sich folgende Fälle:

$x = 0$ **und** $y = 0$**:** Dann folgt $z = \pm 1$ aus (4) und mit (3) folgt dann $\lambda = \dfrac{-2 \mp 1}{8}$.

$x = 0$ **und** $y \neq 0$**:** Dann gilt $\lambda = 3 - x^2 = 3$. Aus (3) folgt $z = -\frac{1}{26}$ und mit (4) gilt $y = \pm 2\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{26}\right)^2} = \pm\frac{15\sqrt{3}}{13}$.

$x \neq 0$ **und** $y = 0$**:** Dann gilt $\lambda = -y^2 = 0$. Aus (3) folgt $z = -\frac{1}{2}$ und mit (4) gilt $x = \pm 2\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{3}$.

$x \neq 0$ **und** $y \neq 0$: Dann gilt $x^2 = 3-\lambda$ und $y^2 = -\lambda$. Aus (3) folgt dann $8\lambda+2 \neq 0$ und damit $z = -\frac{1}{8\lambda+2}$. Durch Einsetzen dieser Relationen in (4) erhält man nach Multiplikation mit $(8\lambda+2)^2$ die Gleichung $2\lambda\,(16\lambda^2+16\lambda+5) = 0$. Wegen $\lambda = -y^2 \neq 0$ gilt $16\lambda^2+16\lambda+5 = 0$ und man erhält mit der Mitternachtsformel $\lambda = \frac{-16\pm\sqrt{-64}}{32} \notin \mathbb{R}$. Also führt dieser Fall zu keinen (reellen) Lösungen.

Somit sind die Kandidaten für die Extremstellen

$$P_1 = (0,0,1)\ , \qquad P_2 = (0,0,-1)\ , \qquad P_3 = \left(0, -\frac{15\sqrt{3}}{13}, -\frac{1}{26}\right)\ ,$$

$$P_4 = \left(0, \frac{15\sqrt{3}}{13}, -\frac{1}{26}\right)\ , \quad P_5 = \left(\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2}\right)\ , \quad P_6 = \left(\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2}\right)\ .$$

(c) Es gilt $f(P_1) = 2$, $f(P_2) = 0$, $f(P_3) = f(P_4) = -\frac{625}{52}$ und $f(P_5) = f(P_6) = -\frac{1}{4}$. Somit ist $\max\limits_{(x,y,z)\in M} f(x,y,z) = 2$ das Maximum von f auf M und $\min\limits_{(x,y,z)\in M} f(x,y,z) = -\dfrac{625}{52}$ das Minimum von f auf M, da M eine kompakte Menge ist (vgl. Satz vom Minimum und Maximum).

(d) Es gilt $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$, das heißt es gilt $y = 0$ für $(x,y,z)^\intercal \in N$. Somit hat $\mathrm{J}\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \\ 8z & 0 \end{pmatrix}$ nie vollen Rang für $(x,y,z)^\intercal \in N$ und die Multiplikatormethode nach Lagrange für mehrere Nebenbedingungen ist nicht anwendbar.

Da $N \subsetneqq M$ eine Teilmenge ist, ist der maximale Wert von f auf N kleiner oder gleich dem Maximum von f auf M. Es gilt aber $(0,0,1) \in N$. Damit folgt

$$2 = f(0,0,1) \leqq \max_{(x,y,z)\in N} f(x,y,z) \leqq \max_{(x,y,z)\in M} f(x,y,z) = 2\ .$$

Daher ist $\max\limits_{(x,y,z)\in N} f(x,y,z) = 2$ das Maximum von f auf N.

Aufgabe H 82. *Extremwertesuche auf einem Kompaktum*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x^2+y^2)$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 3x^2+y^2$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 von f sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Bereich $U_3(0)$.

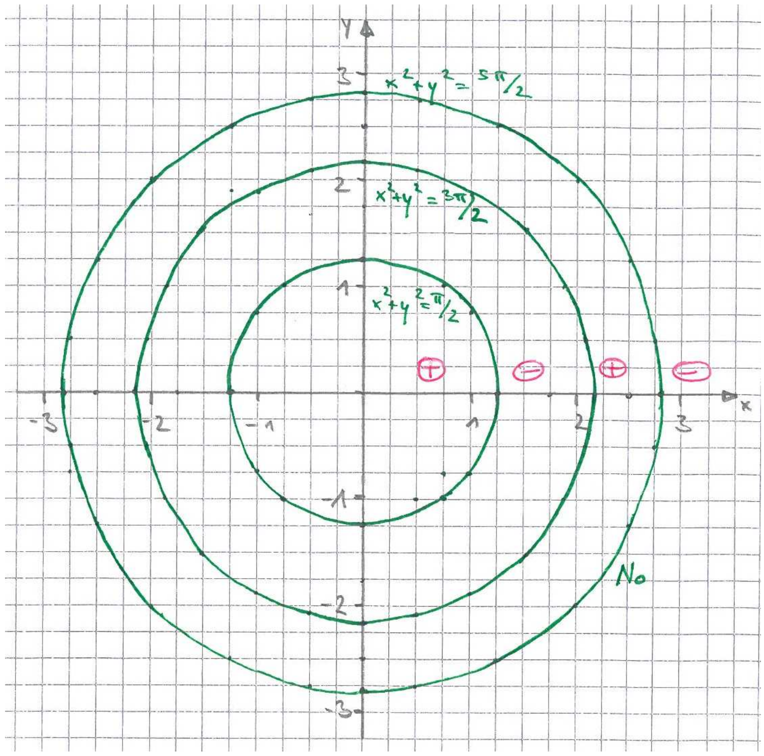
(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein. Bestimmen Sie jeweils den Typ.

(c) Bestimmen Sie mittels Lagrange-Multiplikatoren das Maximum und das Minimum von f auf $B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) = \frac{3\pi}{2}\right\}$.

(d) Bestimmen Sie die Extremwerte, die f auf der Menge $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) \leqq \frac{3\pi}{2}\right\}$ annimmt und geben Sie jeweils eine zugehörige Stelle $(x,y) \in M$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\cos(x^2+y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{\pi}{2}+k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dadurch werden konzentrische Kreise um den Ursprung mit Radius $\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ beschrieben. Die Vorzeichenverteilung ergibt sich im Wechsel positiv und negativ (entsprechend der Cosinus-Funktion) mit positiven Werten im innersten konzentrischen Kreis:

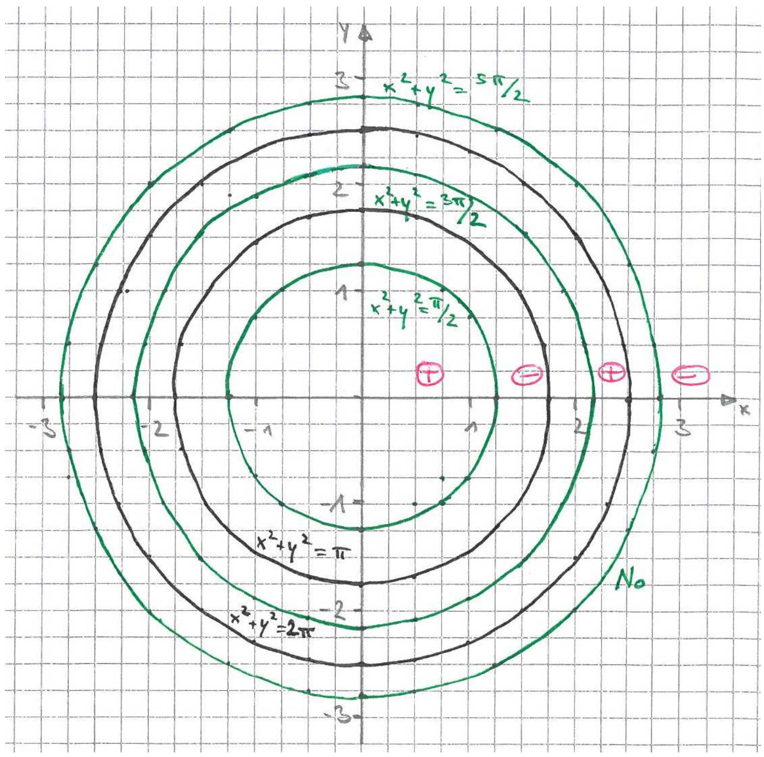


(b) Es ist $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x\sin(x^2+y^2) \\ -2y\sin(x^2+y^2) \end{pmatrix} = 0$. Wir machen die Fallunterscheidung

$\sin(x^2+y^2)=0$: Dann gilt $x^2+y^2=k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$.

$\sin(x^2+y^2)\neq 0$: Dann muss $x=y=0$ gelten, was im Widerspruch zu $\sin(x^2+y^2)\neq 0$ steht.

Die kritischen Stellen sind also alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2=k\pi$ für $k\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$. Dadurch werden konzentrische Kreise um den Ursprung mit Radius $\sqrt{k\pi}$ beschrieben.



Zur Bestimmung des Typs hilft weder die Vorzeichenverteilung (mehrere kritische Punkte in jedem Kreisring, daher hilft der Satz vom Minimum und Maximum nicht direkt weiter) noch die Hesse-Matrix ($\det(\mathrm{H}f) = 0$) Es gilt jedoch

$$\cos(x^2 + y^2) = \cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Wegen $\max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \cos(x^2 + y^2) = 1$ und $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \cos(x^2 + y^2) = -1$ sind die Punkte auf Kreisen mit Radius $\sqrt{k\pi}$ Maxima, wenn k gerade ist, und Minima, wenn k ungerade ist.

(c) Wir verwenden die Nebenbedingung $g'(x, y) = 3x^2+y^2-\frac{3\pi}{2} = 0$. Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem aus $\operatorname{grad} f(x, y) + \lambda \operatorname{grad} g'(x, y) = 0$ und $g'(x, y) = 0$:

$$2x\left(3\lambda - \sin(x^2 + y^2)\right) = 0 \tag{5}$$
$$2y\left(\lambda - \sin(x^2 + y^2)\right) = 0 \tag{6}$$
$$3x^2 + y^2 - \frac{3\pi}{2} = 0 \tag{7}$$

Aus (5) folgt $x = 0$ oder $3\lambda-\sin(x^2+y^2) = 0$. Aus (6) folgt $y = 0$ oder $\lambda-\sin(x^2+y^2) = 0$. Daraus ergeben sich folgende Fälle:

$x = 0$**:** Dann gilt $y = \pm\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$ mit (7) und aus (6) folgt $\lambda = \sin(x^2 + y^2) = -1$.

$x \neq 0 \wedge y = 0$**:** Dann gilt $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ mit (7) und aus (5) folgt $\lambda = \frac{1}{3}\sin(x^2+y^2) = \frac{1}{3}$.

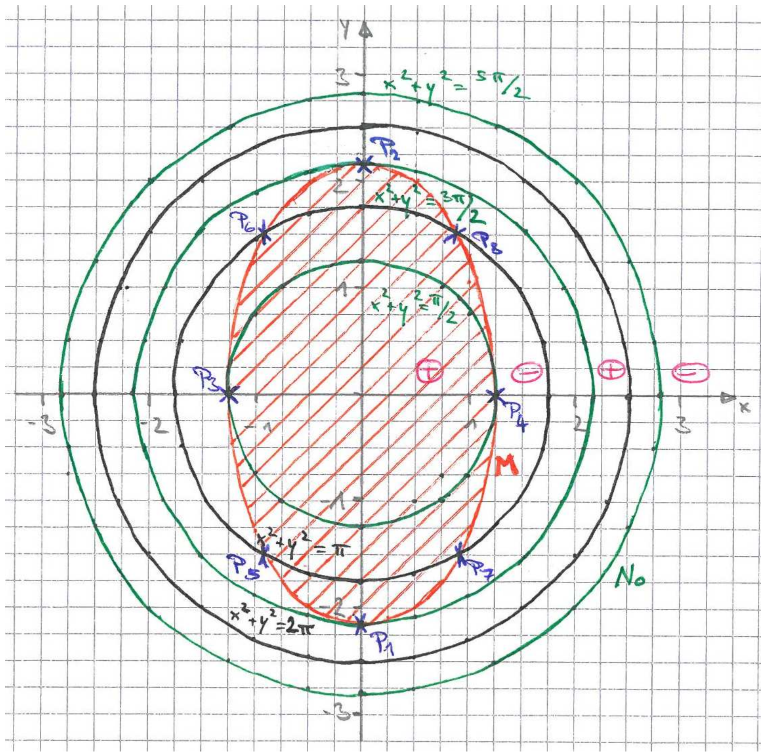
$x \neq 0 \wedge y \neq 0$**:** Dann gilt $3\lambda = \sin(x^2 + y^2) = \lambda$ mit (5) und (6), also $\lambda = 0$ und $x^2 + y^2 = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$. Damit folgt aus (7) $0 \leqq 2x^2 = \frac{3\pi}{2} - k\pi$ und wir erhalten $k \in \{0, 1\}$.
Für $k = 0$ folgt $x = y = 0$ aus $x^2 + y^2 = k\pi = 0$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Also folgt $k = 1$ und man erhält $2x^2 = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$, also $x = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und damit $y = \pm\frac{\sqrt{3\pi}}{2}$ aus (7).

Somit sind die Kandidaten für die Extremstellen

$$P_1 = \left(0, -\sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right), \quad P_2 = \left(0, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right), \quad P_3 = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right),$$
$$P_4 = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right), \quad P_5 = \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right), \quad P_6 = \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right),$$
$$P_7 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right), \quad P_8 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right).$$

Es gilt $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3) = f(P_4) = 0$ und $f(P_5) = f(P_6) = f(P_7) = f(P_8) = -1$. Somit ist $0 = \max\limits_{(x,y)\in B} f(x, y)$ das Maximum von f auf B und $-1 = \min\limits_{(x,y)\in B} f(x, y)$ das Minimum von f auf B

(d) Die Extremwerte von f auf M lassen sich über die Extremwerte im Inneren M° von M (vgl. Aufgabenteil **(a)**) und die Extremwerte auf dem Rand $\partial M = B$ von M (vgl. Aufgabenteil **(b)**) ermitteln. Das Maximum von f auf M° ist 1 in Punkt $(0, 0) \in M^\circ$ und das Minimum ist -1 beispielsweise in $(0, \sqrt{\pi}) \in M^\circ$. Nach Aufgabenteil **(b)** ist 0 das Maximum auf ∂M und -1 das Minimum. Somit wird das Maximum $1 = \max\limits_{(x,y)\in M} f(x, y)$ von f auf M im Punkt $(0, 0)$ angenommen. Das Minimum $-1 = \min\limits_{(x,y)\in M} f(x, y)$ wird beispielsweise in den Punkten $(0, \pm\sqrt{\pi})$, P_5, P_6, P_7 oder P_8. Zur Veranschaulichung wir hier in obige Skizze noch die Menge M eingezeichnet. Dies ist nicht für die Lösung dieser Aufgabe gefordert:



Aufgabe H 83. *Modell: Extrema unter Nebenbedingungen*

Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2$, sowie $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^2 = 0\}$ und $N := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$.
Das in der Präsenzübung benutzte Modell von f finden Sie auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/06/

(a) Skizzieren sie die Nullstellenmenge N_0 und die Vorzeichenverteilung von f sowie die Mengen M und N im Bereich $[-2,2] \times [-2,2]$.

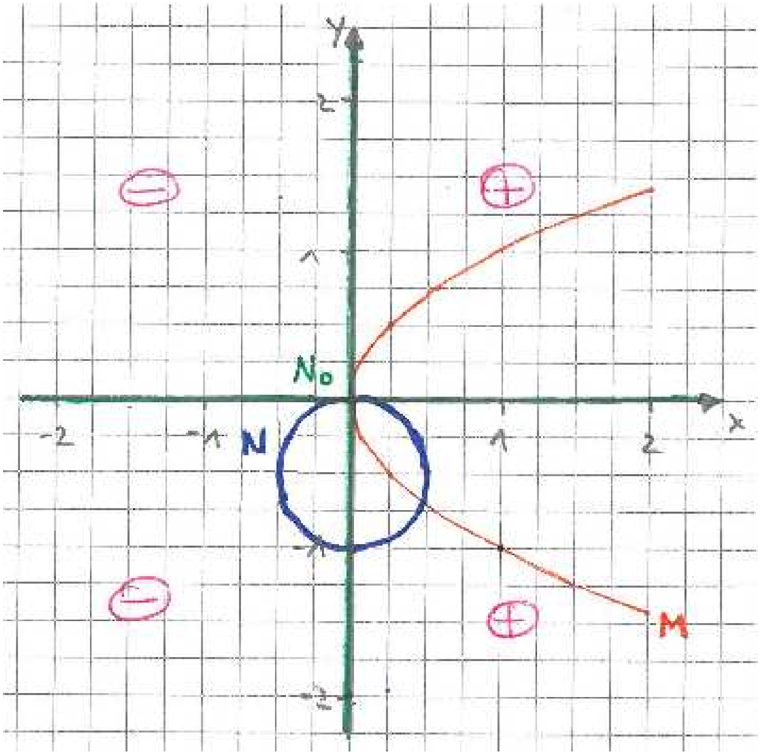
(b) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf M und ermitteln sie jeweils deren Typ.

(c) Parametrisieren Sie M durch eine Funktion $c\colon \mathbb{R} \to M$. Prüfen Sie die Existenz von Extremwerten von f auf M, indem Sie die Funktion $f \circ c$ untersuchen.

(d) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf N und ermitteln sie jeweils deren Typ.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$, also beschreibt N_0 genau die beiden Koordinatenachsen. Für $x > 0$ und $y \neq 0$ gilt $f(x,y) > 0$ und für $x < 0$ und $y \neq 0$ gilt $f(x,y) < 0$. Weiter beschreibt M eine Normalparabel, bei der x als Funktion von y beschrieben wird (also in Richtung der positiven x-Achse geöffnet ist). N beschreibt einen Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Damit ergibt sich die folgende Skizze:



(b) Es ist $g_M(x,y) = x - y^2$. Aus $\operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} g_M(x,y) = 0$ und $g(x,y) = 0$ ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$y^2 + \lambda = 0 \tag{8}$$
$$2y(x - \lambda) = 0 \tag{9}$$
$$x - y^2 = 0 \tag{10}$$

Aus (9) folgt $y = 0$ oder $x = \lambda$.

Ist $y = 0$, so folgt $x = 0$ aus (10) und $\lambda = 0$ aus (8).

Ist $y \neq 0$, also $\lambda = x$, so folgt $x = y^2 = -x$ mit (8) und (10). Somit gilt $x = \lambda = 0$ und es folgt $y = 0$ im Widerspruch zur Annahme.

Folglich ist der einzige Kandidat der Punkt $(0,0)$ und aus der Vorzeichenverteilung ist ersichtlich, dass es sich hierbei um ein Minimum handelt: $f(0,0) = 0$ und wegen $x = y^2 > 0$ für $y \neq 0$ ist ansonsten $f(x,y) > 0$ auf M.

(c) M lässt sich parametrisieren durch die Kurve $c : \mathbb{R} \to M : t \mapsto (t^2, t)$. Damit gilt $(f \circ c)(t) = t^4$. Wir bestimmen nun die Extremstellen von $f \circ c$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(f \circ c)(t) = 4t^3 = 0 \Leftrightarrow t = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,(f \circ c)(t)\bigg|_{t=-1} = -4 < 0 < 4 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,(f \circ c)(t)\bigg|_{t=1} \Rightarrow (f \circ c) \text{ hat bei } t = 0 \text{ ein Minimum.}$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} (f \circ c)(t) = +\infty \Rightarrow (f \circ c) \text{ nimmt auf } M \text{ kein Maximum an.}$$

Somit besitzt f auf M kein Maximum und nimmt sein Minimum $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = (f \circ c)(0) = 0$ im Punkt $c(0) = (0,0)$ an.

(d) Es ist $g_N(x,y) = x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Aus $\operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} g_N(x,y) = 0$ und

$g(x,y) = 0$ ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$y^2 + 2\lambda x = 0 \tag{11}$$

$$2xy + 2\lambda\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{12}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \tag{13}$$

Ist $y = 0$, so folgt $\lambda = 0$ aus (12) und $x = 0$ aus (13).
Ist $y = -\frac{1}{2}$, so folgt $x = 0$ aus (12) und $x \neq 0$ aus (11). Somit führt dies zu keiner Lösung.
Sei nun $y \notin \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$. Dann gilt $x \neq 0 \neq \lambda$ mit (11). Daher folgt $\lambda = -\frac{y^2}{2x}$ aus (11) und $\lambda = -\frac{xy}{y+\frac{1}{2}}$ aus (12). Durch Gleichsetzen und Multiplikation mit den Nennern erhalten wir

$$-2x^2y = -y^2\left(y + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 4x^2 = y(2y+1)\ .$$

Setzen wir diese Identität in die mit 4 multiplizierte Gleichung (13) ein, so erhalten wir

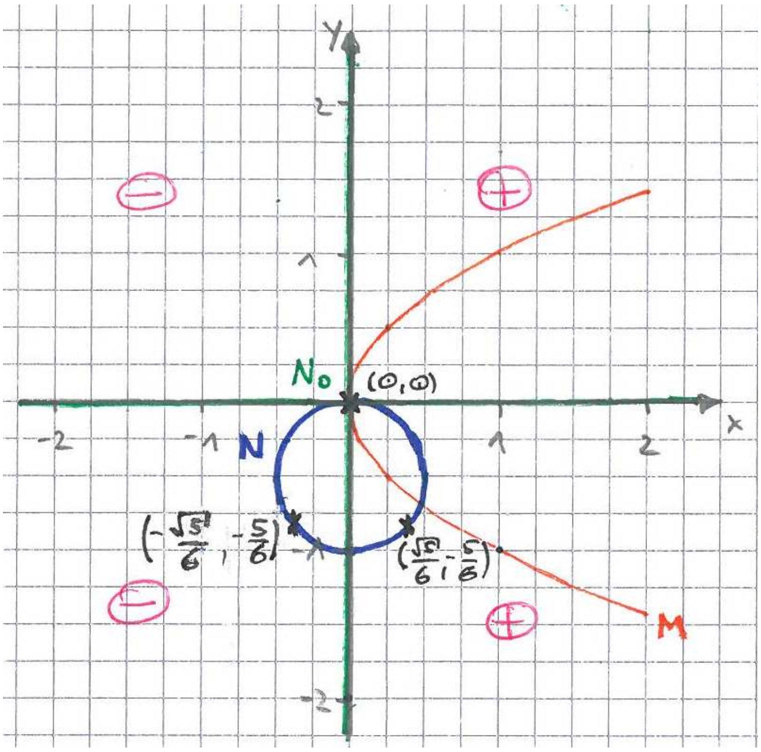
$$6y^2 + 5y = 0 \overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} y = -\frac{5}{6}\ .$$

Aus (13) ergibt sich damit $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{6}$. Damit ist $\lambda = -\frac{y^2}{2x} = \mp\frac{5\sqrt{5}}{6}$.
Aus der Vorzeichenverteilung ist direkt ersichtlich, dass der Punkt $(0,0)$ ein Sattelpunkt von f eingeschränkt auf N ist. Weiter gilt

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right) = -\frac{25\sqrt{5}}{216}\ , \qquad f\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right) = \frac{25\sqrt{5}}{216}\ .$$

Da N kompakt und f stetig ist, besitzt f nach dem Satz vom Minimum und Maximum sowohl ein Maximum als auch ein Minimum auf N. Da hierfür nur die Punkte $\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right)$ und $\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right)$ in Frage kommen, nimmt f sein Minimum $-\frac{25\sqrt{5}}{216} = \min\limits_{(x,y)\in N} f(x,y)$ im Punkt $\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right)$ und sein Maximum $\frac{25\sqrt{5}}{216} = \max\limits_{(x,y)\in N} f(x,y)$ im Punkt $\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right)$ an.

Abschließend nochmal die Skizze aus Aufgabenteil **(a)** mit eingetragenen kritischen Punkten auf M und N. Dies ist nicht für die Lösung dieser Aufgabe gefordert:



Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 5.7.–11.7.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/