Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 88. *Kurvenintegrale von Vektorfeldern*

Sei $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y^2 = z^2,\ 0 \leqq z \leqq 2\}$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale der folgenden Vektorfelder längs der Kurve K von $(0,0,0)$ nach $(4,2,2)$.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x^2y \\ -5xyz \\ y\,\mathrm{e}^z \end{pmatrix}$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^x + z \\ \mathrm{e}^x \\ x \end{pmatrix}$.

(*Hinweis:* Vergleichen Sie mit Aufgabe P80.)

Lösungshinweise hierzu: Wir paramatrisieren K durch $C\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t \end{pmatrix}$. Also ist $C'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_0^2 \begin{pmatrix} 7t^5 \\ 5t^4 \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 14t^6 - t^4 + t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\
&= \left[2t^7 - t^5\right]_0^2 + \int_0^2 t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\
&= 224 + \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\
&= 224 + 2\mathrm{e}^2 - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^2 \\
&= 225 + \mathrm{e}^2
\end{aligned}$$

(b) Das Vektorfeld g hat das Potential $h = y\mathrm{e}^x + xz$ (siehe Aufgabe P80b). Also berechnen wir

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x = h(4,2,2) - h(0,0,0) = 2\mathrm{e}^4 + 8.$$

Bemerkung: Da dieses Integral den Term e^{t^2} involviert, ist es sehr schwer direkt zu berechnen!

Aufgabe H 89. *Länge einer Kurve und Kurvenintegral*

Sei K die Kurve $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \cosh(x),\ 0 \leqq x \leqq 2\}$.

(a) Bestimmen Sie die Länge von K.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y\cosh(x)$. Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}s$.

Lösungshinweise hierzu: Eine reguläre Parametrisierung von K ist durch

$$C\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (t, \cosh(t))^\intercal$$

gegeben. Wir berechnen

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Die Länge von K ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\int_K 1 \, \mathrm{d}s &= \int_0^2 \sqrt{1 + \sinh^2(t)} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 \cosh(t) \, \mathrm{d}t \\
&= [\sinh(t)]_0^2 \\
&= \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_K f(s) \, \mathrm{d}s &= \int_0^2 \sinh(t) \cosh(t) \sqrt{1 + \sinh^2(t)} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 \cosh(t) \sinh^2(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{3} \sinh^3(t) \right]_0^2 \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2} \right)^3 \\
&= \frac{\mathrm{e}^6 - 3\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-6}}{24}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 90. *Potential und Kurvenintegrale*
Gegeben seien für $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + (\alpha - 1) x_2 \\ x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + \alpha(x_2 - 1) \end{pmatrix}$$

sowie die Parametrisierung des Kreises K durch $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld g_α ein Potential hat und geben Sie für diese α ein Potential an.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (a) für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Kurvenintegral $\displaystyle\oint_K g_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Bestimmung der Rotation:

$$\operatorname{rot} g_\alpha = \frac{\partial\,(g_\alpha)_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\,(g_\alpha)_1}{\partial x_2} = \big(x_1x_2\mathrm{e}^{x_1x_2} + \mathrm{e}^{x_1x_2}\big) - \big(x_1x_2\mathrm{e}^{x_1x_2} + \mathrm{e}^{x_1x_2} + (\alpha-1)\big) = 1-\alpha$$

Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist die Existenz eines Potentials äquivalent zu $\operatorname{rot} g_\alpha = 0$. Damit existiert genau dann ein Potential, wenn $\alpha = 1$ ist.

Wir bestimmen ein Potential von g_1.

Es ist $(g_1)_1(x_1, x_2) = x_2\mathrm{e}^{x_1x_2}$, also

$$U(x_1, x_2) = \int (g_1)_1(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 = \int x_2\mathrm{e}^{x_1x_2}\,\mathrm{d}x_1 = \mathrm{e}^{x_1x_2} + c(x_2).$$

Aus der Bedingung $U_{x_2}(x_1, x_2) = (g_1)_2(x_1, x_2)$ ergibt sich

$$x_1\mathrm{e}^{x_1x_2} + c_{x_2}(x_2) = x_1\mathrm{e}^{x_1x_2} + (x_2 - 1)$$

und somit $c_{x_2}(x_2) = x_2 - 1$. Daraus folgt, dass $c(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - x_2$ ist. Ein mögliches Potential ist also gegeben durch

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto \mathrm{e}^{x_1x_2} + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2.$$

(b) Da K ein geschlossener Weg über ein Vektorfeld ist, welches ein Potential besitzt, ergibt sich sofort

$$\int_K g_1(x) \bullet \mathrm{d}x = 0.$$

Es bleibt noch $\int_K g_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}x$ für $\alpha \neq 1$ zu berechnen. Dazu bestimmen wir zuerst C':

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$g_\alpha(x_1, x_2) = g_1(x_1, x_2) + (\alpha - 1)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Das lässt sich benutzen, um das zu berechnende Integral zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\int_K g_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_K \left(g_1(x) + (\alpha-1)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}\right) \bullet \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_K g_1(x) \bullet \mathrm{d}x}_{=0} + \int_K (\alpha - 1)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}x \\
&= (\alpha - 1)\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\sin(t) - 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= (\alpha - 1)\int_0^{2\pi} -4(\sin(t))^2 + 4\sin(t)\cos(t) - 2\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (\alpha - 1)\left[-2(t - \sin(t)\cos(t)) + 2(\sin(t))^2 - 2\sin(t)\right]_0^{2\pi} \\
&= -4\pi(\alpha - 1)
\end{aligned}$$

Aufgabe H 91. *Zirkulation und Ausfluss*
Für ein Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine geschlossene Kurve K in $\mathbb{R}^2$ mit stückweise regulärer Parametrisierung $C\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$, nennen wir

$$Z(f,K) = \int_a^b f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}t$$

die *Zirkulation* von f längs K und

$$A(f,K) = \int_a^b f(C(t)) \bullet \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

den *Ausfluss* von f durch K.
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6xy \\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y \end{pmatrix}$ und sei K der Rand des Dreiecks mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, im mathematisch positiven Sinn orientiert. Berechnen Sie

(a) die Zirkulation $Z(f,K)$ von f längs K.

(b) den Ausfluss $A(f,K)$ von f durch K.

Lösungshinweise hierzu: Wir parametrisieren K in drei Stücken

$$C_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$C_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix},$$
$$C_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Die Ableitungen sind

$$C_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_3'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wir haben

$$Z(f,K) = \int_0^1 f(C_1(t)) \bullet C_1'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(C_2(t)) \bullet C_2'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(C_3(t)) \bullet C_3'(t)\,\mathrm{d}t,$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(C_1(t)) \bullet C_1'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= 0, \\
\int_0^1 f(C_2(t)) \bullet C_2'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 6t(1-t) \\ \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 6t^2 - 6t + \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\
&= \left[2t^3 - 3t^2 - \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t\right]_0^1 \\
&= 2\mathrm{e} - 13, \\
\int_0^1 f(C_3(t)) \bullet C_3'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \mathrm{e}^{1-t} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 -1 - \mathrm{e}^{1-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \left[-t + \mathrm{e}^{1-t}\right]_0^1 \\
&= -1 - \mathrm{e}.
\end{aligned}$$

Also ist $Z(f,K) = \mathrm{e} - 14$ die Summe dieser drei Integrale.

(b) Auf eine ähnliche Art und Weise, berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t &= \int_0^1 -\mathrm{e}^t - 1 \,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\mathrm{e}^t - t\right]_0^1 \\
&= -\mathrm{e} \\
\int_0^1 \begin{pmatrix} 6t(1-t) \\ \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t &= \int_0^1 6t - 6t^2 + \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\
&= \left[3t^2 - 2t^3 - \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t\right]_0^1 \\
&= 2\mathrm{e} - 11 \\
\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \mathrm{e}^{1-t} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t &= 0.
\end{aligned}$$

Also ist $A(f,K) = \mathrm{e} - 11$.