Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *ε-Kriterium*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert a der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie jeweils speziell für $\varepsilon = 10^{-15}$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geqq n_\varepsilon$.

(a) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 9\left(\frac{1}{10}\right)^k$

(b) $a_n = \dfrac{n^2-4}{3n^2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist nach der geometrischen Summenformel

$$a_n = 9\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} = 9\cdot\frac{10-\left(\frac{1}{10}\right)^{n}}{9} = 10-\left(\frac{1}{10}\right)^n .$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 10$. Es ist

$$|a_n - 10| \overset{!}{<} 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad 10^{-n} < 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad n > 15.$$

Also wählen wir zum Beispiel $n_\varepsilon = 16$.

(b) Es ist

$$a_n = \frac{n^2-4}{3n^2} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3n^2}.$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$. Es ist

$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| \overset{!}{<} 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{3n^2} < 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad n > \sqrt{\frac{4}{3}\cdot 10^{15}} = \frac{2}{3}\sqrt{30}\cdot 10^7.$$

Da $\sqrt{30} < 6$, ist zum Beispiel $n_\varepsilon = 40000000$ eine geeignete Wahl.

Aufgabe H 2. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

(a) $a_n = \operatorname{Re}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^n\right)$

(b) $a_n = \min\left\{(-1)^n, \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da hier eine komplexe Zahl potenziert wird, lohnt es sich, in Polarkoordinatendarstellung zu wechseln. Es ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^n &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n\\ &= \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \begin{cases} 1 & \text{, falls } n=8k,\ k\in\mathbb{N},\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mathrm{i}) & \text{, falls } n=8k+1,\ k\in\mathbb{N},\\ \mathrm{i} & \text{, falls } n=8k+2,\ k\in\mathbb{N},\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1+\mathrm{i}) & \text{, falls } n=8k+3,\ k\in\mathbb{N},\\ -1 & \text{, falls } n=8k+4,\ k\in\mathbb{N},\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1-\mathrm{i}) & \text{, falls } n=8k+5,\ k\in\mathbb{N},\\ -\mathrm{i} & \text{, falls } n=8k+6,\ k\in\mathbb{N},\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mathrm{i}) & \text{, falls } n=8k+7,\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}\end{aligned}$$

Dementsprechend ist

$$\operatorname{Re}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^n\right) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n=8k,\ k\in\mathbb{N},\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \text{, falls } n=8k+1,\ k\in\mathbb{N},\\ 0 & \text{, falls } n=8k+2,\ k\in\mathbb{N},\\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \text{, falls } n=8k+3,\ k\in\mathbb{N},\\ -1 & \text{, falls } n=8k+4,\ k\in\mathbb{N},\\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \text{, falls } n=8k+5,\ k\in\mathbb{N},\\ 0 & \text{, falls } n=8k+6,\ k\in\mathbb{N},\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \text{, falls } n=8k+7,\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Da jeder der Werte $0, 1, -1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ unendlich oft angenommen wird, sind das Häufungspunkte der Folge. Da wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oben vollständig in Teilfolgen zerlegt haben, gibt es auch keine weiteren Häufungspunkte.

(b) Für $k\in\mathbb{N}$ gilt $a_{2k} = \min\{(-1)^{2k}, \sin(\pi k)\} = \min\{1,0\} = 0$. Weiterhin ist $a_{2k+1} = \min\left\{(-1)^{2k+1}, \sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)\right\} = -1$. Daher ist

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \text{ gerade,}\\ -1 & \text{, falls } n \text{ ungerade.}\end{cases}$$

Damit besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die beiden Häufungspunkte 0 und -1.

Aufgabe H 3. *Grenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sqrt{\binom{n}{2}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}-\sqrt{n^2+3n+14}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{7^n+n^7}{4^n+3^n}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\frac{1}{n+1}\sqrt{\binom{n}{2}} = \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}}$$
$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1\cdot\sqrt{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Anmerkung: Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass für eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \geqq 0$ für $n\in\mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$. Zeigen könnte man das zum Beispiel wie folgt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann ist

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|^2 = |\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|\cdot|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| \leqq |\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|\cdot|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}| = |a_n - a|.$$

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es ein n_ε, so dass $|a_n - a| < \varepsilon^2$ für alle $n > n_\varepsilon$. Damit gilt aber auch $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}-\sqrt{n^2+3n+14}\\
&= \frac{(\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}-\sqrt{n^2+3n+14})\cdot(\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+3n+14})}{\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+3n+14}}\\
&= \frac{n^2+2n-\sqrt{n}-(n^2+3n+14)}{\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+3n+14}}\\
&= \frac{-n-\sqrt{n}-14}{\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+3n+14}} = \frac{-1-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{14}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^{3/2}}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{14}{n^2}}}\\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(c) Es ist zum Einen (Zähler vergrößern, Nenner verkleinern)

$$\sqrt[n]{\frac{7^n+n^7}{4^n+3^n}} < \sqrt[n]{\frac{7^n n^7 + n^7 7^n}{4^n}} = 7\cdot\frac{\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}^7}{4} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{4}\cdot 1\cdot 1^7 = \frac{7}{4}.$$

Zum Anderen ist (Zähler verkleinern, Nenner vergrößern)

$$\sqrt[n]{\frac{7^n+n^7}{4^n+3^n}} > \sqrt[n]{\frac{7^n}{4^n+4^n}} = \frac{7}{4}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{4}\cdot 1 = \frac{7}{4}.$$

Nach dem Sandwichsatz ist damit $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{7^n+n^7}{4^n+3^n}} = \frac{7}{4}$.

(d) Es ist

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n^2} = (n+1) \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Da offensichtlich $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} > 0$ gilt, haben wir nach dem Sandwichsatz, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} = 0.$$

Aufgabe H 4. *Heron-Verfahren*

Zu $c > 1$ sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right).$$

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt{c} \leqq a_n \leqq c$.

(b) Folgern Sie mit Hilfe von **(a)**, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

(c) Begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert a von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **IA** Falls $c > 1$, so ist $\sqrt{c} < c$, da $a_1 = c$, ist damit der Induktionsanfang gemacht.

IS Zum Einen haben wir

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Bigl(\underbrace{a_n}_{\overset{\text{IH}}{\leqq c}} + \underbrace{\frac{c}{a_n}}_{\overset{\text{IH}}{\leqq \frac{c}{\sqrt{c}} = \sqrt{c} \leqq c}}\Bigr) \leqq \frac{1}{2}(c+c) = c.$$

Weiterhin ist

$$a_{n+1} \geqq \sqrt{c} \quad \Leftrightarrow \quad a_n^2 + c \geqq 2a_n\sqrt{c} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n - \sqrt{c})^2 \geqq 0.$$

Damit folgt durch vollständige Induktion, dass $\sqrt{c} \leqq a_n \leqq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es ist $\sqrt{c} \leqq a_n$, also auch $c \leqq a_n^2$. Damit folgt

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2a_n = a_n.$$

(c) Da die Folge monoton fallend und beschränkt ist, folgt die Konvergenz.

(d) Wir wissen aus der letzten Teilaufgabe, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n =: a \geqq \sqrt{c} > 0$ existiert. Da $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge ist, ist diese ebenfalls konvergent mit demselben Grenzwert. Daher können wir in der Rekursionsvorschrift auf beiden Seiten den Grenzwert bilden und erhalten (nach Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte)

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2a = a + \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{c}.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 5. *Gauß-Algorithmus*

Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sowie der Spaltenvektor $b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Av = 4v + b$.

Lösungshinweise hierzu: Wir formen die Gleichung zunächst um, so dass der unbekannte Vektor v nur auf der linken Seite steht:

$$Av = 4v + b \Leftrightarrow Av - 4v = b \Leftrightarrow (A - 4E_4)v = b.$$

Zu diesem inhomogenen linearen Gleichungssystem stellen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und führen den Gauß-Algorithmus aus:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \frac{1}{2}Z_1 : \\ Z_3 : \\ Z_1 + 2Z_2 : \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc||c} 2 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Vertauschen der zweiten und vierten Spalte liefert dann:

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Für diese modifizierte Koeffizientenmatrix können wir die Lösung einfach ablesen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Schließlich müssen wir noch den Spaltentausch rückgängig machen und erhalten als Lösungsmenge:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$