Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 11. *Stetige Fortsetzung*

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich $D \subsetneqq \mathbb{R}$ an und untersuchen Sie ihr Verhalten an den Rändern von D (inklusive $-\infty$ und $+\infty$).

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 4x - 1}$

(b) $g(x) = \cos\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

An welchen Punkten in $\mathbb{R}$ und mit welchen Funktionswerten lassen sich die Funktionen (einseitig) stetig fortsetzen?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten zunächst das Zählerpolynom $q(X) = X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 11X - 6$: Durch Raten finden wir die Nullstelle $x_1 = 2$ und erhalten:

$$\begin{aligned} q(x) &= x^4 - 2x^3 + 5x^3 - 10x^2 + 7x^2 - 14x + 3x - 6 \\ &= (x-2)(x^3 + 5x^2 + 7x + 3) \end{aligned}$$

Durch erneutes Raten finden wir die Nullstelle $x_2 = -3$ und formen weiter um:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x-2)(x^3 + 3x^2 + 2x^2 + 6x + x + 3) \\ &= (x-2)(x+3)(x^2 + 2x + 1) = (x-2)(x+3)(x+1)^2 \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4 + \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{7}\right) \\ x_2 &= \frac{4 - \sqrt{28}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}\left(2 - \sqrt{7}\right) \end{aligned}$$

Keine der Nullstellen stimmt mit denen des Zählerpolynoms überein. Folglich lässt sich keine Definitionslücke heben, wir erhalten

$$D = \mathbb{R} \smallsetminus \left\{\frac{1}{3}\left(2 - \sqrt{7}\right), \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{7}\right)\right\}$$

Für das Verhalten um die Definitionslücken Untersuchen wir die Vorzeichenverteilung von Zähler $q(x) = (x-2)(x+3)(x+1)^2$ und Nenner $p(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{7}\right)\right)\left(x + \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{7}\right)\right)$. Unter Berücksichtigung von $-3 < -\frac{1}{3} < \frac{1}{3}\left(2 - \sqrt{7}\right) < 0$ sowie $\frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{7}\right) < \frac{5}{3} < 2$ erhalten wir – der Faktor $(x+1)^2$ hat keine Auswirkung auf das VZ:

$$\begin{array}{llllllll} q(x) > 0 & \text{falls} & x < -3 & , & p(x) > 0 & \text{falls} & x < \frac{1}{3}\left(2 - \sqrt{7}\right) \\ q(x) < 0 & \text{falls} & -3 < x < 2 & , & p(x) < 0 & \text{falls} & \frac{1}{3}\left(2 - \sqrt{7}\right) < x < \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{7}\right) \\ q(x) > 0 & \text{falls} & x > 2 & , & p(x) > 0 & \text{falls} & x > \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{7}\right) \end{array}$$

und somit

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{q(x)}{p(x)} > 0 &\qquad \text{falls } -3 < x < \frac{1}{3}\left(2 - \sqrt{7}\right) \\ f(x) < 0 &\qquad \text{falls } \frac{1}{3}\left(2 - \sqrt{7}\right) < x < \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{7}\right) \\ f(x) > 0 &\qquad \text{falls } \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{7}\right) < x < 2 \end{aligned}$$

Da ferner die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}\left(2-\sqrt{7}\right)} q(x)$ und $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}\left(2-\sqrt{7}\right)} q(x)$ existieren und $\neq 0$ sind, leiten wir hieraus wegen $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}\left(2-\sqrt{7}\right)} |p(x)| = \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{7}\right)} |p(x)| = 0$ das Verhalten

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{1}{3}\left(2-\sqrt{7}\right)-0} f(x) &= \infty \\
\lim_{x\to\frac{1}{3}\left(2-\sqrt{7}\right)+0} f(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{7}\right)-0} f(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{7}\right)+0} f(x) &= \infty
\end{aligned}$$

ab. Ferner gilt nach 1.11.18 wegen $4 > 2, 1 \cdot 3 > 0$ und $(-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot 3 > 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \infty \\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= -\infty
\end{aligned}$$

(b) $\cos$ ist auf gesamt $\mathbb{R}$ definiert, somit ist $g(x)$ für alle x definiert, für die $\frac{1}{1-x^2}$ definiert ist. Die Definitionslücken sind offenbar $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Wir definieren die Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mittels

$$\begin{aligned}
\alpha_n &:= \sqrt{1 - \frac{1}{\pi n}} \\
\beta_n &:= \sqrt{1 + \frac{1}{\pi n}} \\
\gamma_n &:= -\sqrt{1 + \frac{1}{\pi n}} \\
\delta_n &:= -\sqrt{1 - \frac{1}{\pi n}}
\end{aligned}$$

Dann gelten:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 1$
- $\alpha_n < 1 < \beta_n$ für alle n
- $g(\alpha_n) = \cos(\pi n) = (-1)^n$, $g(\beta_n) = \cos(-\pi n) = (-1)^n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = -1$
- $\gamma_n < -1 < \delta_n$ für alle n
- $g(\gamma_n) = \cos(-\pi n) = (-1)^n = \cos(-\pi n) = g(\delta_n)$

Somit existiert keiner der Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-1-0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-1+0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)$ und $\lim\limits_{x\to 1+0} g(x)$, die Funktion lässt sich nicht stetig fortsetzen.
Es gilt ferner $\frac{1}{1-x^2} \to 0$ für $x \to \pm\infty$, woraus

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} g(x) &= 1 \\
\lim_{x\to-\infty} g(x) &= 1
\end{aligned}$$

folgt.

Aufgabe H 12. *Grenzwerte und Stetigkeit*
Sei $\alpha \geqq 0$ ein reeller Parameter. Sei

$$f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \sqrt{6x+7} - \sqrt{\frac{\alpha}{7}x+3} & x > 3 \\ -\cos(\pi x) & x \leqq 3 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$. Für welche α liegt dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$?

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_α in Abhängigkeit von α.

(c) Bestimmen Sie α_0 so, dass f_{α_0} in $x_0 = 3$ stetig ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{6x+7} - \sqrt{\frac{\alpha}{7}x+3}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{6x+7} - \sqrt{\frac{\alpha}{7}x+3}\right)\left(\sqrt{6x+7} + \sqrt{\frac{\alpha}{7}x+3}\right)}{\sqrt{6x+7} + \sqrt{\frac{\alpha}{7}x+3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(6 - \frac{\alpha}{7}\right)x + 4}{\sqrt{6x+7} + \sqrt{\frac{\alpha}{7}x+3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\left(6 - \frac{\alpha}{7}\right)}{\sqrt{6+\frac{7}{x}} + \sqrt{\frac{\alpha}{7}+\frac{3}{x}}}\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{6x+7} + \sqrt{\frac{\alpha}{7}x+3}} \right) \\
&= \begin{cases} -\infty, & \alpha > 42 \\ 0, & \alpha = 42 \\ +\infty, & \alpha < 42. \end{cases}
\end{aligned}$$

Das heißt, für $\alpha = 42$ liegt der Grenzwert in $\mathbb{R}$.

(b) Wir betrachten zunächst den Fall $x \geqq 3$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{6x+7} &= \sqrt{\frac{\alpha}{7}x+3} \\
\Leftrightarrow 6x+7 &= \frac{\alpha}{7}x+3 \\
\Leftrightarrow \frac{42-\alpha}{7}x &= -4 \\
\Leftrightarrow x = -\frac{4}{42-\alpha} &= \frac{4}{\alpha-42}
\end{aligned}$$

Die Bedingung $x > 3$ ist dabei nur für $42 < \alpha < \frac{130}{3}$ erfüllt.

Wir betrachten nun den Fall $x \leqq 3$: Die Nullstellen von $\cos(t)$ sind gegeben durch $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, somit sind die Nullstellen von $\cos(\pi x)$ gegeben durch $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Da wir nur Nullstellen $\leqq 3$ benötigen, folgt für die Nullstellenmenge $\mathcal{N}(\alpha)$ von f_α:

$$\mathcal{N}(\alpha) = \begin{cases} \left\{\frac{1}{2} + k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, k \leqq 2\right\} \cup \left\{\frac{4}{\alpha - 42}\right\} & \alpha \in \left(42, \frac{130}{3}\right) \\ \left\{\frac{1}{2} + k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, k \leqq 2\right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Der links- und rechtsseitige Grenzwert von f_{α_0} soll an der Stelle $x_0 = 3$ miteinander übereinstimmen sowie mit $f_{\alpha_0}(3)$. Da f_α für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ linksseitig stetig in $x_0 = 3$ ist – in $(-\infty, 3]$ stimmt die Funktion mit der stetigen Funktion $\cos(\pi x)$ über ein – führt dies auf die Bedingung

$$\begin{aligned} -\cos(3\pi) = 1 &\overset{!}{=} \lim_{x \to 3+0} f_{\alpha_0}(x) \\ \Leftrightarrow 1 &= \lim_{x \to 3+0} \left(\sqrt{6x+7} - \sqrt{\frac{\alpha_0}{7}x + 3}\right) \\ \Leftrightarrow 1 &= 5 - \sqrt{\frac{3\alpha_0}{7} + 3} \\ \Leftrightarrow 16 &= \frac{3\alpha_0}{7} + 3 \\ \Leftrightarrow \alpha_0 &= \frac{91}{3} \end{aligned}$$

Somit ist f_α nur für $\alpha = \alpha_0 = \frac{91}{3}$ in $x_0 = 3$ stetig.

Aufgabe H 13. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{5x^3 + 9x - 123456789}{x^3 - 3x^2 + 4x - 3}$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin(\tan(x))$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{-x} \cos(x^2) + \mathrm{e}^x\right)$

(d) $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{4x^8}{\sqrt{5x^{18} + 25x^{16}} - \sqrt{5x^{18} + 4x^{16}}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für den Nenner gilt: $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 3 = 9 \neq 0$, somit ist $x \mapsto \frac{5x^3+9x-123456789}{x^3-3x^2+4x-3}$ in $x = 3$ stetig und wir müssen nur einsetzen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} \frac{5x^3 + 9x - 123456789}{x^3 - 3x^2 + 4x - 3} &= \frac{5 \cdot 27 + 9 \cdot 3 - 123456789}{9} \\ &= 15 + 3 - 13717421 = -13717403 \end{aligned}$$

(b) Für die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = -\pi n$, $\frac{\pi}{4} - \pi n$ gelten aufgrund der π-Periodizität des Tangens

$$\lim_{n \to \infty} \tan(a_n) = \tan(0) = 0$$
$$\lim_{n \to \infty} \tan(b_n) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Wegen $\sin(1) \neq \sin(0)$ folgt, dass $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin(\tan(x))$ nicht existiert.

(c) Es gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x^2) = 0$$

wegen $0 \leqq |\mathrm{e}^{-x}\cos(x^2)| \leqq \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ (Sandwhich). Somit folgt mit $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ als uneigentlicher Grenzwert

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x}\cos(x^2) + \mathrm{e}^x\right) = +\infty$$

(d) Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-0} \frac{4x^8}{\sqrt{5x^{18}+25x^{16}} - \sqrt{5x^{18}+4x^{16}}} &= \lim_{x\to 0-0} \frac{4x^8}{x^8\sqrt{25+5x^2} - x^8\sqrt{4+5x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0-0} \frac{4}{\underbrace{\sqrt{25+5x^2}}_{\to 5} - \underbrace{\sqrt{4+5x^2}}_{\to 2}} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe H 14. *Stetigkeit*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq -2 \\ \frac{3}{2}|x| & \text{für } -2 < x < 2 \\ 3 & x \geqq 2 \end{cases}$.

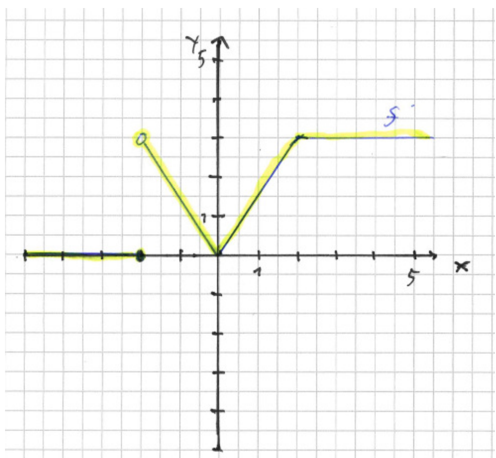
(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(b) Sei eine Fehlerschranke $1 > \varepsilon > 0$ gegeben.
Finden Sie in Abhängigkeit von ε ein $\delta_1 > 0$ mit $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ für $x \in [2, 2+\delta_1)$ und ein $\delta_2 > 0$ mit $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ für $x \in (2-\delta_2, 2]$. Ist f an der Stelle 2 stetig?

(c) Finden Sie ein $\varepsilon > 0$, für welches kein $\delta > 0$ existiert mit $f(U_\delta(-2)) \subseteqq U_\varepsilon(f(-2))$. Ist f an der Stelle -2 stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $x \leqq -2$ und $x \geqq 2$ stimmt f mit den konstanten Funktionen $x \mapsto 0$ und $x \mapsto 3$ überein. Für $x \in (-2, 0)$ entspricht f der Funktion $x \mapsto -\frac{3}{2}x$, welche eine Ursprungsgerade mit Steigung $-\frac{3}{2}$ beschreibt. Analog entspricht f für $x \in [0, 2)$ der durch $x \mapsto \frac{3}{2}x$ beschriebenen Ursprungsgeraden mit Steigung $\frac{3}{2}$, was auf die rechtsseitige Skizze führt.
Da f bei $x = -2$ offenbar einen Sprung macht, ist es wichtig zu kennzeichen, welcher der Punkte $(-2, 0)$ und $(-2, 3)$ zum Graphen von f gehört – hier geschehen durch ausgefüllte und leere Kreise.



(b) Wir machen eine Fallunterscheidung.

- Sei $x \geqq 2$. Dann gilt: $f(x) = 3$ und $|f(x) - f(2)| = |3-3| = 0$, was für alle $\varepsilon > 0$ kleiner als ε ist. Deshalb kann man für δ_1 irgendetwas wählen, z.B. $\delta_1 = 2025\varepsilon$.
- Sei $x \in (0, 2]$. Dann gilt: $f(x) = \frac{3}{2}|x| = \frac{3}{2}x$ und

$$|f(x) - f(2)| = \left|\frac{3}{2}x - 3\right| = 3 - \frac{3}{2}x.$$

  Sei $\delta_2 = 2 - \frac{2\varepsilon}{3}$. Wegen $\varepsilon < 1$ und somit $2 - \frac{2\varepsilon}{3} > 0$ gilt $(2 - \delta_2, 2] \subsetneqq (0, 2]$. Wenn also $x \in (2 - \delta_2, 2]$ ist, haben wir: $|f(x) - f(2)| = 3 - \frac{3}{2}x$. Dies führt auf:

$$x \in (2-\delta_2, 2] \Rightarrow |x-2| < \frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow 2-x < \frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow 3-\frac{3}{2}x < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(2)| < \varepsilon.$$

Sei nun $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ und sei $x \in U_\delta(2)$.

- Für $x \geqq 2$ folgt aus $|x - 2| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \leqq \delta_1$, dass $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$, d.h.

$$f(x) \in U_\varepsilon(f(2))$$

  gilt.
- Für $x \leqq 2$ folgt aus $|x-2| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \leqq \delta_2$ ebenfalls, dass $|f(x)-f(2)| < \varepsilon$ d.h. $f(x) \in U_\varepsilon(f(2))$ gilt.

Daraus folgt $f(U_\delta(2)) \subseteqq U_\varepsilon(f(2))$.
Um die Stetigkeit zu beweisen muss die $\varepsilon - \delta-$Beschreibung für alle $\varepsilon > 0$ überprüft werden – bisher haben wir es nur für $1 > \varepsilon > 0$ getan. Sei dann $\varepsilon \geqq 1$. Man wählt $\varepsilon' \in (0, 1)$: Wir haben gezeigt, dass ein $\delta_{\varepsilon'}$ mit $|f(x) - f(2)| < \varepsilon'$ für alle $|x - 2| < \delta_{\varepsilon'}$ existiert.
Sei $\delta_\varepsilon := \delta_{\varepsilon'}$, dann folgt aus $|x-2| < \delta_\varepsilon = \delta_{\varepsilon'}$ die Ungleichung $|f(x)-f(2)| < \varepsilon' < \varepsilon$. Deswegen gilt die $\varepsilon - \delta-$Beschreibung für alle $\varepsilon > 0$ und f ist an der Stelle 2 stetig.

(c) Sei $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig. Es existiert $0 < \delta' < \frac{4}{3}$ so, dass $U_{\delta'}(-2) \subseteqq U_\delta(-2)$. Für alle $x \in (-2, -2 + \delta') \subseteqq (-2, -2 + \frac{4}{3})$ gilt dann $f(x) = -\frac{3}{2}x$ und

$$|f(x) - f(-2)| = \left|-\frac{3}{2}x - 0\right| = -\frac{3}{2}x.$$

Aber $x < -2 + \delta' \Rightarrow -x > 2 - \delta' > 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{3}{2}x > 1$, also $|f(x) - f(-1)| > \varepsilon$.
Wir haben gezeigt, dass $f(U_{\delta'}(-2)) \nsubseteqq U_\varepsilon(f(-2))$ ist.
Daraus folgt $f(U_\delta(-2)) \nsubseteqq U_\varepsilon(f(-2))$ (weil $U_{\delta'}(-2) \subseteqq U_\delta(-2)$). Da δ beliebig war, gilt die $\varepsilon - \delta-$Beschreibung an der Stelle -1 für $\varepsilon = 1$ nicht, daher ist f an der Stelle -2 nicht stetig.

Frischhaltebox

Aufgabe H 15. *Häufungspuntke von Folgen*
Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = (-1)^{n!} + \mathrm{i}^n$.

Lösungshinweise hierzu: Für $n \geqq 2$ ist $n!$ gerade, also ist $(-1)^{n!} = 1$ für alle $n \geqq 2$. i^n nimmt genau vier verschiedene Werte an:

- $\mathrm{i}^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n = 4k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$
- $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n = 4k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$
- $\mathrm{i}^n = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n = 4k+2$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$
- $\mathrm{i}^n = -\mathrm{i}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n = 4k+3$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$

Es folgt für $n \geqq 2$:

$$z_n = \begin{cases} 2 & n \in 4\mathbb{N} \\ 1+\mathrm{i} & n \in 4\mathbb{N}_0 + 1 \\ 0 & n \in 4\mathbb{N}_0 + 2 \\ 1-\mathrm{i} & n \in 4\mathbb{N}_0 + 3 \end{cases}$$

Folglich gilt für die Teilfolgen $(z_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(z_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(z_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} z_{4n} &= 2 \\ \lim_{n\to\infty} z_{4n+1} &= 1+\mathrm{i} \\ \lim_{n\to\infty} z_{4n+2} &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} z_{4n+3} &= 1-\mathrm{i} \end{aligned}$$

$a_1 = 2$, $a_2 = 1+\mathrm{i}$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1-\mathrm{i}$ sind also Häufungspunkte. Da $4\mathbb{N} \cup (4\mathbb{N}_0+1) \cup (4\mathbb{N}_0+1) \cup (4\mathbb{N}_0+2) \cup (4\mathbb{N}_0+3) = \mathbb{N}$ gilt, haben wir jedes $n \in \mathbb{N}$ berücksichtigt, es gibt daher keine Weiteren.