Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 16. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien und Entwicklungspunkte der folgenden komplexen Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3z+2)^n}{\sqrt{n-1}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{3n}\left(\frac{n+1}{4n+1}\right)^n$

Untersuchen Sie diese ferner in den Randpunkten der Konvergenzkreise auf Konvergenz.
In (a) genügt hierbei die Konvergenzuntersuchung in den reellen Randpunkten.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3z+2)^n}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n-1}}\left(z-\frac{2}{3}\right)^n$$

der Entwicklungspunkt ist folglich $z_0 = \frac{2}{3}$. Für den Konvergenzradius nutzen wir das Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-3)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right|}{\left|\frac{(-3)^n}{\sqrt{n-1}}\right|} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$
$$= 3\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 3,$$

was einen Radius von $\rho = 1/3$ ergibt. Wir untersuchen die Konvergenz in den reellen Randpunkten $a = \frac{1}{3}$ und $b = 1$:

a :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n-1}}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{n}$ divergiert die Reihe nach dem Minorantenkriterium.

b :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Da $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine alternierende, moton fallende Nullfolge ist ($\frac{1}{\sqrt{n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{n-1}}$), konvergiert die Reihe.

(b) In diesem Falle ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Wir schreiben die Reihe um:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{3n}\left(\frac{n+1}{4n+1}\right)^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

mit

$$a_k = \begin{cases} \left(\frac{\frac{k}{3}+1}{\frac{4}{3}k+1}\right)^{\frac{k}{3}} & k \in 3\mathbb{N} \\ 0 & k \notin 3\mathbb{N} \end{cases}$$

Wir verwenden das Wurzelkriterium :

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{k}}{\frac{4}{3}+\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}},$$

was einen Konvergenzradius von $\rho = \sqrt[3]{4}$ ergibt. In den Randpunkten gilt $|z|^k = (\sqrt[3]{4})^k$, woraus

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |a_k z^k| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\frac{\frac{4}{3}k+4}{\frac{4}{3}k+1}\right)^{\frac{k}{3}} \geqq 1$$

folgt. Da $\left(a_k z^k\right)_k$ keine Nullfolge sein kann, divergiert die Reihe in den Randpunkten.

Aufgabe H 17. *Grenzwerte*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x+10} - \sqrt[3]{x-3}$

Hinweis: Was ist $(a-b)(a^2+ab+b^2)$?

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos(\sqrt{x})}{x}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2-4)^2}{x-2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + b^2a - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

Wir erhalten mit dem Hinweis folglich

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+10} - \sqrt[3]{x-3} &= \frac{\left(\sqrt[3]{x+10} - \sqrt[3]{x-3}\right)\left(\sqrt[3]{x+10}^2 + \sqrt[3]{x+10}\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-3}^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+10}^2 + \sqrt[3]{x+10}\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-3}^2\right)} \\ &= \frac{x+10-(x-3)}{(x+10)^{\frac{2}{3}} + (x^2+7x-30)^{\frac{1}{3}} + (x-3)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{13}{x^{\frac{2}{3}}\left(\left(1+\frac{10}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\left(1+\frac{10}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1-\frac{3}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)} \end{aligned}$$

Für $x \geqq 10$ folgt

$$0 \leqq \sqrt[3]{x+10} - \sqrt[3]{x-3} \leqq \frac{13}{x^{\frac{2}{3}}} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Es gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x+10} - \sqrt[3]{x-3} = 0$.

(b) Es gilt:

$$0 \leqq \left|\frac{\cos(\sqrt{x})}{x}\right| \leqq \frac{1}{|x|}$$

Gemäß dem Sandwich-Satz folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\sqrt{x})}{x} = 0$$

(c) Für $x \notin \{-2, 2\}$ gilt

$$\frac{(x^2-4)^2}{x-2} = (x+2)^2(x-2)$$

Daher ist der Grenzwert für $x \to 2$ gleich 0.

Aufgabe H 18. *Nullstellenproblem*

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(3x) - x$.

(a) Zeichnen Sie die Funktion f zwischen$x \in [-1, 1]$.

(b) Zeigen Sie, dass f in $[-1, 1]$ mindestens drei Nullstellen besitzt.

(c) Berechnen Sie mit Algorithmus 1.13.13 ausgehend von den Schranken $a_0 = 0.5,\ b_0 = 1$ die Schranken $a_5,\ b_5$ der Nullstelle in $(0, 1)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir stellen zunächst fest, dass $f(-x) = -f(x)$ gilt, es genügt also exemplarisch Werte in $[0, 1]$ einzusetzen, wobei wir die Symmetrien des Sinus ausnutzen:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0\\
f\left(\frac{\pi}{9}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{9} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{9}\\
f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6}\\
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\\
f\left(\frac{2}{9}\pi\right) &= \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \frac{2}{9}\pi = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \frac{2}{9}\pi\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{9}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{9}\pi
\end{aligned}$$

Dies führt auf die in 1 dargestellte Funktion:

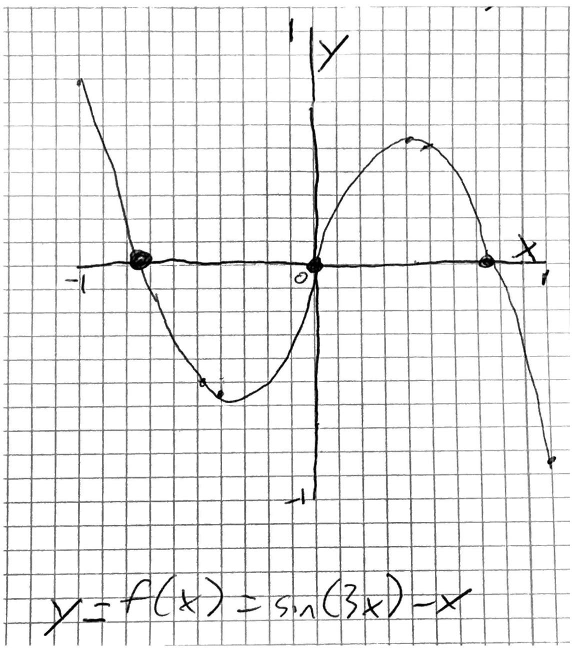

Abbildung 1:

(b) Wir betrachten f auf dem Intervall $\left[\frac{\pi}{6}, 1\right] \subsetneq [-1,1]$: Es gilt:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6} > 1 - 1 = 0$$

$$f(1) = \sin(3) - 1 < 1 - 1 = 0$$

Somit folgt nach dem Nullstellensatz von Bolzano die existenz einer Nullstelle in $\left[\frac{\pi}{6}, 1\right]$. Analog erhalten wir für $\left[-1, -\frac{\pi}{6}\right]$ aus

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{6} < 1 - 1 = 0$$

$$f(-1) = -\sin(3) + 1 > 1 - 1 = 0$$

eine Nullstelle. Ferner ist $x = 0$ ebenfalls eine Nullstelle: $f(0) = 0$. Wegen

$$\left[\frac{\pi}{6}, 1\right] \cap \{0\} \cap \left[\frac{\pi}{6}, 1\right] = \emptyset$$

sind alle drei Nullstellen verschieden, es existieren mindestens drei.

(c) Die ersten Iterationen des Algorithmus 1.3.13 ergeben:

k	0	1	2	3	4	5
a_k	0.5	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
b_k	1	1	0.875	0.8125	0.78125	0.765625
$f(a_k)$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	
$f(b_k)$	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0	
$f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)$	> 0	< 0	< 0	< 0	< 0	

wobei die VZ mit einem hinreichend genauen Taschenrechner bestimmt wurden.

Aufgabe H 19. *Konvergenzradien*

Betrachten Sie die Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n z^{3n}$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$.

(a) Bestimmen Sie Konvergenzradien ρ_f und ρ_g mittels Wurzelkriterium.

(b) Geben Sie jeweils für $f(z)$ und $g(z)$ einen geschlossenen Ausdruck an.
Die durch diese Ausdrücke beschriebenen Funktionen haben Definitionslücken. Geben Sie die Lage ebendieser in Relation zur Konvergenzkreisscheibe an: „im Inneren"/„außerhalb"/„auf dem Rand".

(c) Das Produkt $h(z) = f(z)g(z)$ hat ebenfalls eine Reihendarstellung $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.
Bestimmen Sie c_n für $0 \leqq n \leqq 3$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} -\sqrt[3]{2}^n & n \in 3\mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir erhalte somit

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[3]{2}$$

und somit den Konvergenzradius $\rho_f = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Analog erhalten wir für g aus

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{3^n} = 3$$

den Konvergenzradius $\rho_g = \frac{1}{3}$.

(b) Innerhalb des Konvergenzkreises gelten $|(-2)z^3| < 1$ und $|3z| < 1$, weshalb wir diese Reihen als geometrische Reihen auffassen können, was auf die folgende Darstellungen führt:

$$f(z) = \frac{1}{1-(-2z^3)} = \frac{1}{1+2z^3}$$
$$g(z) = \frac{1}{1-3z}$$

Die zugehörigen Funktionen haben jeweils eine Definitionslücke bei $z_f = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ beziehungsweise $z_g = \frac{1}{3}$. Beide Definitionslücken liegen genau auf dem Rand der Konvergenzkreisscheibe.

(c) Nach 1.14.11 (4) gilt $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, was auf

$$c_0 = a_0 b_0$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$
$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

und somit

n	0	1	2	3
a_n	1	0	0	-2
b_n	1	3	9	27
c_n	1	3	9	25

führt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 20. *Komplexe Gleichungen*
Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichungen:

(a) $(3+2\mathrm{i})^4 = w$ **(b)** $z^2 = 10+20\mathrm{i}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$(3+2\mathrm{i})^4 = ((3+2\mathrm{i})^2)^2 = (5+12\mathrm{i})^2 = -119+120\mathrm{i}$$

(b) Es gilt $|10+20\mathrm{i}| = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$ und somit (da $10+20\mathrm{i}$ im ersten Quadranten liegt)

$$10+20\mathrm{i} = 10\sqrt{5}\,(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))$$

mit $\varphi := \arctan\left(\frac{20}{10}\right) = \arctan(2)$. Hieraus erhalten wir die Lösungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{10\sqrt{5}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)\right) \\ z_2 &= \sqrt{10\sqrt{5}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)+\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)+\pi\right) \\ &= -\sqrt{10\sqrt{5}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)\right) \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:
Sei $z = a+b\mathrm{i}$ eine Lösung $(a, b \in \mathbb{R})$. Dann gilt $10+20\mathrm{i} = (a+b\mathrm{i})^2 = a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$ und somit:

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= 10 \\ 2ab &= 20 \end{aligned}$$

Wegen $ab \neq 0$ erhalten wir $b = \frac{10}{a}$ und somit:

$$10 = a^2 - \frac{100}{a^2} \Leftrightarrow 0 = u^2 - 10u - 100$$

mit $u := a^2$. Hierausfolgt

$$a^2 = u = \frac{10+\sqrt{100+400}}{2} = 5+5\sqrt{5}$$

und somit

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{5+5\sqrt{5}} \\
\Rightarrow b_1 &= \frac{10}{\sqrt{5+5\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{5+5\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} \\
&= \frac{\sqrt{(5+5\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}}{2} = \frac{\sqrt{-20+20\sqrt{5}}}{2} = \sqrt{5\sqrt{5}-5} \\
a_2 &= -\sqrt{5+5\sqrt{5}} \\
\Rightarrow b_2 &= -b_1 = \sqrt{5\sqrt{5}-5}
\end{aligned}
$$

Die Lösungen lauten also:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{5+5\sqrt{5}} + \mathrm{i}\sqrt{5\sqrt{5}-5} \\
z_2 &= -\sqrt{5+5\sqrt{5}} - \mathrm{i}\sqrt{5\sqrt{5}-5}
\end{aligned}
$$