R. Adarbeh, J. Joussen,
J. Miller, R. Schmähl,
I. Solonenko



M. Stroppel

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 21.** *Differenzierbarkeit und Tangenten*

Sei $m \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $f$ eine Funktion mit

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} (x-1)(x+2)^2 + 5\,, & x \leqq 0 \\ (x+1)^2 + mx\,, & x > 0 \end{cases}.$$

**(a)** Für welche $m \in \mathbb{R}$ ist $f$ stetig?

**(b)** Für welche $m \in \mathbb{R}$ ist $f$ an der Stelle $0$ differenzierbar?

**(c)** Bestimmen Sie für den in **(b)** bestimmten Wert von $m$ die Gleichung der Tangente $T$ an den Graphen von $f$ an der Stelle $0$. Skizzieren Sie die Tangente $T$ sowie den Graphen.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Auf $(-\infty, 0)$ und $(0, +\infty)$ ist $f$ über polynomiale Ausdrücke definiert und somit auf $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ gemäß **1.12.3** stetig. Es bleibt die Stetigkeit an der Stelle $0$ zu untersuchen. Dazu berechnet man den links- und rechtsseitigen Grenzwert von $f$ an der Stelle $0$ und erhält

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (x-1)(x+2)^2 + 5 = 1 = f(0)$$

und

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x+1)^2 + mx = 1 = f(0).$$

Beide Grenzwerte stimmen unabhängig von $m$ mit $f(0)$ überein, somit ist $f$ an der Stelle $0$ für alle $m \in \mathbb{R}$ stetig.

**(b)** Die Funktion $f$ ist an der Stelle $0$ differenzierbar, wenn jeweils links- und rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $0$ existieren und beide Werte identisch sind. Man berechnet also

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0-0} f'(x) &= \lim_{x \to 0-0} (x+2)^2 + 2(x-1)(x+2) \\ &= \lim_{x \to 0-0} (x^2+4x+4) + 2(x^2-3x-2) \\ &= \lim_{x \to 0-0} 3x^2 - 2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+0} f'(x) &= \lim_{x \to 0+0} 2(x+1) + m \\ &= \lim_{x \to 0+0} 2 + m \end{aligned}$$

Das heißt, $f$ ist an der Stelle $0$ differenzierbar, falls $m = -2$.

**(c)** Für $m = -2$ ergibt sich die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f$ an der Stelle $0$ als:

$$-1 = 0x + b \Leftrightarrow y = mx + b = 0x - 1 = -1.$$

Die Tangente ist in Abbildung 2 eingezeichnet.

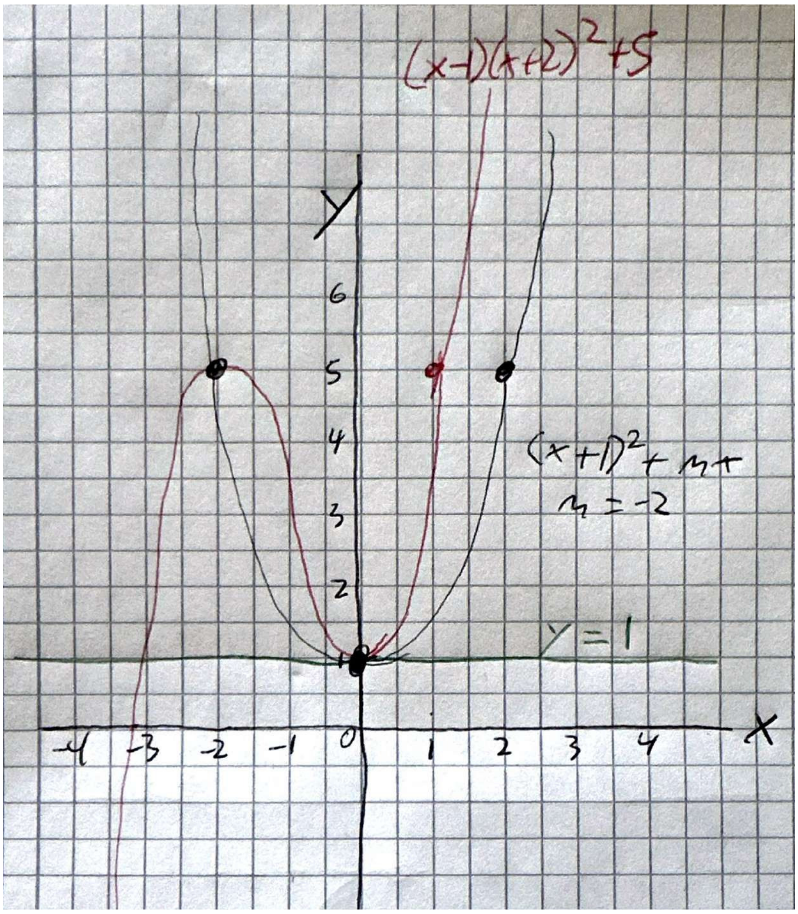


Abbildung 2: $f(x)$ mit $m = -2$

**Aufgabe H 22.** *Ableitungen berechnen*

**(a)** Berechnen Sie für folgende Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils $f'$:

**(i)** $f(x) = \cos(x^3 - 2x^2 + 2)$

**(ii)** $f(x) = \sin(x)\,\cos(x^2)$

**(iii)** $f(x) = x^{2x+1}$.

**(b)** Der Cotangens hyperbolicus coth ist definiert durch $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.
Zeigen Sie, dass $\coth'(x) = 1 - (\coth(x))^2$ gilt.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** **(i)** Mit der Kettenregel folgt

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\cos(x^3 - 2x^2 + 2)) = -(3x^2 - 4x) \cdot \sin(x^3 - 2x^2 + 2)\,.$$

**(ii)** Die Kombination von Ketten- und Produktregel führt auf

$$(\sin(x)\,\cos(x^2))' = \cos(x)\cos(x^2) - 2x\sin(x)^2\,.$$

**(iii)** Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x^{2x+1}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\mathrm{e}^{\log(x)(2x+1)}\right) &= \mathrm{e}^{\log(x)(2x+1)} \cdot (\log(x)(2x+1)) \\ &= \left(\frac{2x+1}{x} + 2\log(x)\right)\mathrm{e}^{\log(x)(2x+1)} \\ &= \left(\frac{2x+1}{x} + 2\log(x)\right) = x^{2x}(2x+1+2x\log x).\end{aligned}$$

**(b)** Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\mathrm{e}^x \pm \mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^x \mp \mathrm{e}^{-x}$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\right) &= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\ &= 1 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right)^2 \\ &= 1 - (\coth(x))^2.\end{aligned}$$

**Bemerkung:** Die Kurzschreibweise $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\mathrm{e}^x \pm \mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^x \mp \mathrm{e}^{-x}$ ist wie folgt zu verstehen: Wenn mehrere $\pm/\mp$ in einer Formel/Gleichung auftreten, so werden immer die Vorzeichen auf selber „Höhe‘ als zu einer „Version“ des Ausdrucks gehörig aufgefasst, im vorliegenden Fall alo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$$

Entsprechend ist bei der Verwendung dieser Ausdrücke Vorsicht walten zu lassen: Will man bspw. die Nullstellen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der Funktion $(x, y) \mapsto (1 - x^2)(1 - y^2)$ kurz als $\begin{pmatrix}\pm 1\\ \pm 1\end{pmatrix}$ zusammenfassen, gibt man nur die Nullstellen $\binom{1}{1}$ und $\binom{-1}{-1}$ an.

**Aufgabe H 23.** *Monotonie*

Betrachten Sie die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 4x + 2$.

**(a)** Berechnen Sie $f(0)$ und $g(0)$.

**(b)** Bestimmen Sie $f'$ und $g'$ und werten Sie die Ableitung in $0$ aus.

**(c)** Folgern Sie $f(x) \geqq g(x)$ für alle $x \geqq 0$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** $f(0) = 2,\ g(0) = 2$

**(b)** Es gelten $f'(x) = 4e^{2x}$ und $g'(x) = 4$. Entsprechend ist $f'(0) = 4,\ g'(0) = 4$.

**(c)** Wenn $x \geqq 0$ ist, dann gilt $e^{2x} \geqq 1$ und somit $f'(x) \geqq g'(x)$ bzw. $f'(x) - g'(x) \geqq 0$. Die Funktion $x \mapsto f(x) - g(x)$ ist also für $x \geqq 0$ monoton steigend. Wegen $f(0) - g(0) = 0$ folgt damit $f(x) \geqq g(x)$ für alle $x \geqq 0$ erfüllt.

**Aufgabe H 24.** *Ableitungen*

Bestimmen Sie im Folgenden jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteqq \mathbb{R}$ von $f$. Bestimmen Sie ferner erste und zweite Ableitung.

**(a)** $f(x) = \ln(\tan(3x)^4)$

**(b)** $f(y) = \dfrac{1}{1-cy^4}, \quad c \in \mathbb{R}^+$

**(c)** $f(\xi) = \sqrt{\dfrac{(\xi+1)^4}{\xi^4+1}}$

**(d)** $f(\eta) = \dfrac{\eta^4-1}{\eta^2+1}2^\eta$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Der Definitionsbereich von $\ln$ ist $\mathbb{R}^+$. Wegen $r^4 \geqq 0\ \forall r \in \mathbb{R}$ müssen wir also nur $x \mapsto \tan(3x)$ auf Nullstellen und Definitionslücken überprüfen. Mit $\tan(0) = 0$ und der $\pi$-Periodiziät der Tangens-Funktion folgt einerseits

$$\tan(3x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \in \pi\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$$

Andererseits folgt aus $\tan(x) = \frac{\sin(x}{\cos(x)}$ und $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, dass $\tan(3x)$ genau dann nicht definiert ist, wenn

$$x \in \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$$

Der Definitionsbereich ist somit gegeben durch

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left( \left\{ k\frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$$

Für die Ableitungen erhält man das Folgende

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\ln(\tan(3x)^4)\right) = \frac{4\tan(3x)^3}{(\tan(3x))^4} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\right) \\ &= 12 \cdot \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)} \cdot \frac{(\cos(3x))^2 + (\sin(3x))^2}{(\cos(3x))^2} = \frac{12}{\sin(3x)\cos(3x)} \end{aligned}$$

und entsprechend (wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\cos(x)\sin(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{36(\sin(3x))^2 - 36\cos(3x))^2}{(\cos(3x))^2(\sin(3x))^2} \\ &= \frac{36}{(\cos(3x))^2} - \frac{36}{(\sin(3x))^2} \end{aligned}$$

**(b)** Es gilt $1 - cy^4 = 0 \Leftrightarrow y^4 = \frac{1}{c}$, somit ist der Definitionsbereich ist gegeben durch $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{\sqrt[4]{c}}, \frac{1}{\sqrt[4]{c}} \right\}$. Für die Ableitungen erhält man das Folgende:

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left((1-cy^4)^{-1}\right) = \frac{4cy^3}{(1-cy^4)^2} \\ f''(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left(\frac{4cy^3}{(1-cy^4)^2}\right) = \frac{12cy^2(1-cy^4)^2 + 32c^2y^6(1-cy^4)}{(1-cy^4)^4} \\ &= \frac{12cy^2(1-cy^4) + 32c^2y^6}{(1-cy^4)^3} = \frac{12cy^2 + 20c^2y^6}{(1-cy^4)^3} \end{aligned}$$

**(c)** Wegen $(\xi+1)^4 \geqq 0, \xi^4+1 \geqq 1$ für beliebiges $\xi$ ist der Definitionsbereich gegeben durch $D_f = \mathbb{R}$. Wir erhalten als Ableitungen für $\xi \neq -1$

$$\begin{aligned}
f'(\xi) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{(\xi+1)^4}{\xi^4+1}}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\xi}\left(\frac{(\xi+1)^4}{\xi^4+1}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\frac{(\xi+1)^4}{\xi^4+1}}} \frac{4(\xi+1)^3(\xi^4+1)-4(\xi+1)^4\xi^3}{(\xi^4+1)^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\frac{(\xi+1)^4}{\xi^4+1}}} \frac{4(\xi+1)^3(1-\xi^3)}{(\xi^4+1)^2} \\
&= 2\sqrt{\xi^4+1} \cdot \frac{(\xi+1)(1-\xi^3)}{(\xi^4+1)^2} = \sqrt{\xi^4+1} \cdot \frac{2+2\xi-2\xi^3-2\xi^4}{(\xi^4+1)^2} \\
f''(\xi) &= \frac{4\xi^3}{\sqrt{\xi^4+1}} \cdot \frac{1+\xi-\xi^3-\xi^4}{(\xi^4+1)^2} \\
&\quad + 2\sqrt{\xi^4+1} \cdot \frac{(1-3\xi^2-4\xi^3)(\xi^4+1)^2 - 8(1+\xi-\xi^3-\xi^4)(\xi^4+1)\xi^3}{(\xi^4+1)^4} \\
&= \frac{4\xi^3+4\xi^4-4\xi^6-4\xi^7}{\sqrt{\xi^4+1}\,(\xi^4+1)^2} + 2\sqrt{\xi^4+1} \cdot \frac{(1-3\xi^2-4\xi^3)(\xi^4+1) - 8(\xi^3+\xi^4-\xi^6-\xi^7)}{(\xi^4+1)^3} \\
&= \sqrt{\xi^4+1} \cdot \frac{4\xi^3+4\xi^4-4\xi^6-4\xi^7}{(\xi^4+1)\,(\xi^4+1)^2} + 2\sqrt{\xi^4+1} \cdot \frac{1-3\xi^2-12\xi^3-7\xi^4+5\xi^6+4\xi^7}{(\xi^4+1)^3} \\
&= \sqrt{\xi^4+1} \cdot \frac{2-6\xi^2-20\xi^3-10\xi^4+6\xi^6+4\xi^7}{(\xi^4+1)^3}
\end{aligned}$$

**(d)** Es ist

$$f(\eta) = \frac{\eta^4-1}{\eta^2+1}2^\eta = \frac{(\eta^2-1)(\eta^2+1)}{\eta^2+1}2^\eta = (\eta^2-1)\mathrm{e}^{\ln(2)\eta}.$$

Der Definitionsbereich ist folglich gegeben durch $D_f = \mathbb{R}$, da $\eta^2+1 > 0$.
Mit Hilfe der Produkt- sowie der Kettenregel ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
f'(\eta) &= 2\eta\mathrm{e}^{\ln(2)\eta} + \ln(2)(\eta^2+1)\mathrm{e}^{\ln(2)\eta} \\
&= (2\eta + \ln(2)\eta^2 - \ln(2))\mathrm{e}^{\ln(2)\eta} \\
f''(\eta) &= (2+2\ln(2)\eta)\,\mathrm{e}^{\ln(2)\eta} + \ln(2)(2\eta+\ln(2)\eta^2-\ln(2))\mathrm{e}^{\ln(2)\eta} \\
&= \left(2 + (\ln(2))^2\eta^2 + 4\ln(2)\eta - (\ln(2))^2\right)\mathrm{e}^{\ln(2)\eta}
\end{aligned}$$

**Frischhaltebox**

**Aufgabe H 25.** *Potenzreihen*

Bestimmen Sie Konvergenzradien und Entwicklungspunkte folgender Potenzreihen:

$$f(z) = \sum_{n=3}^{\infty}(z-1)^n\frac{n-2}{n+1} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z^2-2(2-1\mathrm{i})z+(3-4\mathrm{i}))^n}{3^{2n}}$$

**Lösungshinweise hierzu:**

$f$: Der Entwicklungspunkt liegt bei $z_f = 1$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n-1)}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n-2} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{4}{n^2}} = 1\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius beträgt daher $\rho_f = 1$.

$g$: Der Zähler kann als $(z-(2-\mathrm{i}))^2$ faktorisiert werden. Die Gesamtsumme lässt sich daher wie folgt ausdrücken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^2 - 2(2-1\mathrm{i})z + (3-4\mathrm{i}))^n}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} (z-(2-\mathrm{i}))^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-(2-1\mathrm{i})^n.$$

mit $a_n = \begin{cases} 3^{-n} & n \in 2\mathbb{N} \\ 0 & n \in 2\mathbb{N}-1 \end{cases}$. Mit dem Wurzelkriterium ergibt sich

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

woraus sich der Konvergenzradius $\rho_g = 3$ ergibt.
Der Entwicklungspunkt liegt bei $z_g = 2 - \mathrm{i}$.