

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 26. Satz von Rolle

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \prod_{k=1}^{2025} (x - k)$. Wieviele reelle Nullstellen und lokale Extrema besitzt die j -te Ableitung $f^{(j)}$ der Funktion f für $j = 1, \dots, 2024$? Bestimmen Sie ferner $f^{(2024)}(x)$.

Hinweis: Liegt bei einer differenzierbaren Funktion $h: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum vor, so gilt $h'(x_0) = 0$.

Lösungshinweise hierzu: f hat die Nullstellen $x_k = k, 1 \leq k \leq 25$. Nach dem Satz von Rolle existiert in jedem der offenen Intervalle $I_k = (x_k, x_{k+1}), 1 \leq k \leq 2024$ eine Nullstelle von $f'(x)$. Also hat f' mindestens 2024 verschiedene Nullstellen. Desweiteren ist $f'(x)$ ein Polynom vom Grad 2024, also hat die Ableitung maximal 2024 reelle Nullstellen und damit genau 2024.

Induktiv folgt für die höheren Ableitungen, dass die j -te Ableitung $f^{(j)}$ genau $(2025 - j)$ Nullstellen besitzt:

- $f^{(j+1)}$ ist ein Polynom vom Grad $2025 - (j + 1)$.
- Sind $x_l^j, 1 \leq l \leq 2025 - j$ die Nullstellen der j -Ableitung, so existiert in jedem der Intervalle $(x_l^j, x_{l+1}^j), 1 \leq l \leq 2025 - j - 1$ mindestens eine Nullstelle der $(j + 1)$ -Ableitung.

Ferner gilt: $f^{(j)}(x_l^j) = f^{(j)}(x_{l+1}^j) = 0 \neq f^{(j)}(x_{l+1}^{j+1})$, d.h. die j -Ableitung hat keine Nullstellen in den Nullstellen der $(j + 1)$ -Ableitung. Somit folgt nach 1.13.1, angewandt auf die Intervalle $[x_l^j, x_{l+1}^j]$, dass es sich bei den Nullstellen der $(j + 1)$ -Ableitung – den einzigen Kandidaten für lokale Extrema von $f^{(j)}$ – um Extremalstellen der j -Ableitung handelt, somit hat $f^{(j)}$ also $2025 - (j + 1)$ lokale Extrema.

Um $f^{(2024)}$ zu bestimmen, genügt es die Koeffizienten von x^{2025} und x^{2024} zu bestimmen – die restlichen Monome verschwinden bei 2024-fachem Ableiten. Hierzu nutzen wir, dass für beliebiges $K \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=1}^K (X - k) = X^K - \left(\sum_{k=1}^K k \right) X^{K-1} + p_K(X)$$

gilt, wobei $p_K(X)$ ein Polynom vom Grad $\leq K - 2$ ist:

$$\textcircled{\text{IA}} \quad K = 1: \prod_{k=1}^1 (X - k) = X - 1 = X - \left(\sum_{k=1}^1 k \right) X^{K-1} + \underbrace{0}_{p_1(X)}$$

$$\textcircled{\text{IS}} \quad K \rightarrow K + 1:$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{K+1} (X - k) &= (X - (K + 1)) \prod_{k=1}^K (X - k) = (X - (K + 1)) \left(X^K - \left(\sum_{k=1}^K k \right) X^{K-1} + p_K(X) \right) \\ &= X^{K+1} - \left(\sum_{k=1}^K k \right) X^K - (K + 1) X^K + \underbrace{(X - (K + 1)) p_K(X)}_{\text{Grad} \leq (K-2)+1} \\ &= X^{K+1} - \left(\sum_{k=1}^{K+1} k \right) X^K + p_{K+1}(X) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$f(x) = x^{2025} - x^{2024} \sum_{k=1}^{2025} k + \dots$$

Da

$$\sum_{k=1}^{2025} k = \frac{(2025)(2026)}{2}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} f^{(2024)}(x) &= \left(\prod_{k=2}^{2025} k \right) x - \left(\prod_{k=1}^{2024} k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{2025} k \right) \\ &= 2025! x - \frac{2026!}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe H 27. Differentialquotient und Mittelwertsatz

- (a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für $0 < a < b$ und $n > 1$ die Ungleichung $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$.
- (b) Prüfen Sie, ob der Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = x^2 - x^{2/3}$ im Intervall $[-1, 8]$ anwendbar ist.
- (c) Die Temperatur in einer Stadt wird zu zwei verschiedenen Zeiten am Tag gemessen. Um 6:00 Uhr morgens beträgt die Temperatur 12°C , und um 12:00 Uhr mittags beträgt sie 24°C . Der Zeitintervall zwischen den beiden Messungen beträgt 6 Stunden. Erkläre anhand des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, warum die Temperatur zu irgendeinem Zeitpunkt während des Tages mit 2°C pro Stunde gestiegen ist.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Der Mittelwertsatz besagt: Es gibt ein $\xi \in (a, b)$, so dass $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, falls die stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist auf dem Intervall (a, b) . Beide Bedingungen werden durch die Funktion $x \mapsto x^n$ im Intervall $[a, b]$ erfüllt. Wegen $f'(x) = nx^{n-1}$ gibt es also ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$b^n - a^n = n\xi^{n-1}(b - a). \quad (1)$$

Die Funktion ξ^{n-1} ist für $\xi > 0$ streng monoton wachsend, d.h. für $\xi \in (a, b)$ gilt (wegen $a > 0$):

$$a^{n-1} < \xi^{n-1} < b^{n-1}$$

Da außerdem $n(b-a) > 0$ bekommt man damit aus 1 die gewünschte Ungleichung

$$n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}.$$

- (b) Die Funktion f ist auf dem geschlossenen Intervall $[-1, 8]$ stetig. Für $x \neq 0$ ist f ferner differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Für $x = 0$ müssen wir nun den Differentialquotienten betrachten.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h^{\frac{2}{3}}}{h} = h + h^{-\frac{1}{3}}$$

Wählt man $h_n := \frac{1}{n}$ folgt $h_n + h_n^{-\frac{1}{3}} > \sqrt[3]{n} \rightarrow \infty$, d.h. dass f auf dem offenen Intervall $(-1, 8)$ NICHT differenzierbar ist. Die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes sind NICHT erfüllt, daher gilt der Mittelwertsatz nicht.

- (c) Sei $f(t)$ die Temperatur (in $^{\circ}\text{C}$) zur Zeit t (in min), mit $f(6) = 12$ und $f(12) = 24$. Die Temperaturfunktion $f(t)$ ist im Allgemeinen stetig und differenzierbar. Das ist für reale Temperaturverläufe eine plausible Annahme. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein Zeitpunkt $\tau \in (6, 12)$, so dass $f'(\tau) = \frac{f(12) - f(6)}{12 - 6} = \frac{12}{6} = 2$. Es gab also mindestens einen Zeitpunkt zwischen 6 : 00 und 12 : 00 Uhr, an dem die Temperaturänderungsrate $2^{\circ}\text{C}/\text{Std.}$ betrug.

Aufgabe H 28. Funktionsgrenzwerte

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^x - 2^{x+3} + 16}{(x-2)^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(x) + \alpha x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^5) + x^5}{x^5 + e^{(-x^5)}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^{(e^x)}$$

Lösungshinweise hierzu: In (a), (c) und (d) nutzen wir jeweils l'Hospital.

(a) Es liegt die Situation $\mathbf{N}_2$ vor.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^x - 2^{x+3} + 16}{(x-2)^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2^x - 4)^2}{(x-2)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{((2^x - 4)^2)'}{((x-2)^2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(2^x - 4) 2^x \ln(2)}{2(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} 2^x \ln(2) \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2^x - 4)'}{(x-2)'} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} 2^x \ln(2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(2) 2^x}{1} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} 2^x \ln(2) = 4 \ln(2) \cdot 4 \ln(2) = 16(\ln(2))^2. \end{aligned}$$

(b) Bei diesem Ausdruck lässt sich die Regel von l'Hospital 2.5.1 nicht gewinnbringend anwenden. Stattdessen erweitert man den Bruch mit $\frac{1}{x^5}$. Dies liefert

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^5) + x^5}{x^5 + e^{(-x^5)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sin(x^5)}{x^5} + 1}{1 + \frac{e^{(-x^5)}}{x^5}} = 1,$$

denn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(-x^5)}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5 e^{(x^5)}} = 0$, und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^5)}{x^5} = 0$. Der letzte Grenzwert kann analog zu 1.12.8 hergeleitet werden: Für $x > 0$ folgt aus der „Sandwich-Abschätzung“

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x^5)}{x^5} \right| \leq \frac{1}{x^5},$$

in welcher beide Seiten für $x \rightarrow +\infty$ gegen 0 konvergieren, dass auch $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^5)}{x^5} = 0$.

Bemerkung:

Die Regel von l'Hospital kann nicht angewendet werden, da der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx} (\sin(x^5) + x^5)}{\frac{d}{dx} (x^5 + e^{(-x^5)})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\cos(x^5) + 1) \cdot 5x^4}{(1 - e^{(-x^5)}) \cdot 5x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x^5) + 1}{1 - e^{(-x^5)}}$$

aufgrund des Ausdrucks $\cos(x^5)$ im Zähler nicht existiert.

(c) Man beobachtet zuerst dass, für $x \neq 0$, gilt

$$\frac{x^2}{\ln(x) + \alpha x^2} = \frac{1}{\alpha + \frac{\ln(x)}{x^2}}.$$

Man kann dann die Regel von l'Hospital für den Term $\frac{\ln(x)}{x^2}$ benutzen, da $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. Man erhält

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

und daraus folgt, dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2 + \ln(x)} = \frac{1}{\alpha}$ wenn $\alpha \neq 0$.

Für $\alpha = 0$ sieht man analog, dass

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(x)} \stackrel{""}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{2x}{\frac{1}{x}}}_{=2x^2} = +\infty$$

(d) Nach Umformung liegt Situation $\mathbf{N}_{+\infty}$ vor:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^{(e^x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(e^x \ln(1 - e^{-x})) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - e^{-x})}{e^{-x}}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(1 - e^{-x}))'}{(e^{-x})'}\right) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right)}{-e^{-x}}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 - e^{-x}}\right) = e^{-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 29. Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung

(a) Gegeben ist die Funktion $f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sqrt[3]{2x+2}$.

(i) Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ auf.

(ii) Schätzen Sie das Lagrange-Restglied zum Taylorpolynom 2. Grades für $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$ unabhängig von x ab.

(b) Gegeben ist die Funktion $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Bestimmen Sie die Taylorreihe an der Stelle $x = 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir benötigen in dieser Aufgabe die folgenden Ableitungen von f :

$$f(x) = \sqrt[3]{2x+2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(2x+2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3}\right) (2x+2)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{8}{9}(2x+2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$f^{(3)}(x) = 2 \cdot \left(-\frac{8}{9}\right) \left(-\frac{5}{3}\right) (2x+2)^{-\frac{8}{3}} = \frac{80}{27}(2x+2)^{-\frac{8}{3}}$$

(i) Das Taylorpolynom zweiten Grades an $x_0 = 3$ ist gegeben durch

$$T_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(3)}{k!} (x-3)^k = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2}(x-3)^2$$

Wir werten die Funktion und die benötigten Ableitungen an $x_0 = 3$ aus:

$$f(3) = \sqrt[3]{8} = 2, \quad f'(3) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right)^2 = \frac{1}{6}, \quad f''(3) = -\frac{8}{9} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right)^5 = -\frac{1}{36}$$

Damit erhalten wir das Taylorpolynom

$$T_2(x) = 2 + \frac{1}{6}(x-3) - \frac{1}{72}(x-3)^2$$

(ii) Das Restglied zum Taylorpolynom 2. Grades zu $x_0 = 3$ lautet

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(z)}{3!} (x-3)^3 = \left(\frac{80}{27}\right) \left(\frac{1}{6}\right) (2z+2)^{-\frac{8}{3}} (x-3)^3 = \frac{40}{81} (x-3)^3 (2z+2)^{-\frac{8}{3}},$$

für geeignetes $z(x) \in (\min\{3, x\}, \max\{3, x\})$. Ist also $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$, so muss auch $z \in [-\frac{1}{2}, 3]$ sein. Auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, 3]$ nimmt aus Monotoniegründen der Term $|x-3|^3$ den größten Wert $\frac{7^3}{8}$ für $x = -\frac{1}{2}$ an. Analog folgt aus Monotoniegründen, das $|(2z+2)^{-\frac{8}{3}}|$ ebenfalls auch am linken Rand ($z = -\frac{1}{2}$) maximal wird mit Wert 1. Damit können wir das Restglied für $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$ wie folgt abschätzen:

$$|R_2(x)| = \frac{40}{81} \underbrace{|(x-3)^3|}_{\leq \frac{7^3}{8}} \underbrace{|(2z+2)^{-\frac{8}{3}}|}_{\leq 1} \leq \frac{5 \cdot 343}{81} = \frac{1715}{81}$$

Bemerkung: Genauere Untersuchung zeigt, dass $|T_2(x) - f(x)| \leq |T_2(-\frac{1}{2}) - f(-\frac{1}{2})|$ für $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$ gilt. Mit $|T_2(-\frac{1}{2}) - f(-\frac{1}{2})| = \frac{71}{288} < \frac{1}{4}$ ist obiges eine überraschend schlechte Abschätzung!

- (b) Zunächst vereinfacht man $g(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Beachte speziell $g(0) = 0$.
Jetzt zeigt man durch vollständige Induktion

$$g^{(n)}(x) = (n-1)! \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-x)^n} \right),$$

für $n \geq 1$:

IA $n = 1$: $g'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = 0! \cdot \left(\frac{(-1)^{1+1}}{(1+x)^1} + \frac{1}{(1-x)^1} \right)$

IS $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} g^{(n)}(x) = (n-1)! \left(\frac{(-1)^{n+1} \cdot (-n)}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n}{(1-x)^{n+1}} \right) \\ &= n! \left(\frac{(-1)^{(n+1)+1}}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ 2(n-1)! & n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases} = (1 - (-1)^n)(n-1)!,$$

was mit $g(0) = 0$ auf die Taylorreihe

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} x^n$$

führt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 30. *Ableitung und Bewegung eines Objekts*

Der Ort eines Objekts zum Zeitpunkt t sei durch die Funktion $s(t) = -\frac{1}{2}(t-4)^2$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Objekts zum Zeitpunkt t .
(b) Hält das Objekt irgendwann an? Wenn ja, wann?

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung der Ortsfunktion:

$$v(t) = s'(t) = -\frac{1}{2} \cdot 2(t-4) = -t + 4.$$

- (b) Das Objekt hält an, wenn die Geschwindigkeit null ist:

$$v(t) = 0 \Rightarrow t = 4.$$

Ja, das Objekt hält einmal an, und zwar bei $t = 4$.