Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 31. *Extrema*

Betrachten Sie die Funktion $f_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f_c(x) = x^2(1-(x-c))^2$ mit Parameter $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $f_c'(x)$ und $f_c''(x)$.

(b) Ermitteln Sie die Nullstellen von $f_c(x)$ und $f_c'(x)$.

(c) Klassifizieren Sie die lokalen Extrema von f für $c = 1$ und $c = 2$.

(d) Skizzieren Sie $f_c(x)$ für $c = 1$ und $c = 2$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die erste Ableitung von f ist

$$\begin{aligned} f_c'(x) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x^2)\right) \cdot (1-(x-c))^2 + x^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(1-(x-c))^2\right) \\ &= 2x((1+c)-x)^2 - 2((1+c)-x)x^2 \\ &= 4x^3 - 6(1+c)x^2 + 2(1+c)^2 x \end{aligned}$$

bzw. – in der für (b) und (c) vorteilhaften faktorisierten Form –

$$\begin{aligned} f_c'(x) &= 2x((1+c)-x)\,((1+c-x)-x) \\ &= 2x((1+c)-x)\,(1+c-2x) \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung lautet somit

$$f_c''(x) = 12x^2 - 12(c+1)x + 2(1+c)^2.$$

(b) Die Nullstellen von f_c liegen bei $x_1 := 0$ und $x_2 := c+1$, die von f_c' bei $\tilde{x}_1 := 0$, $\tilde{x}_2 := \frac{1+c}{2}$ und $\tilde{x}_3 := 1+c$.

(c) Die (möglichen) Extrema von f_c sind die Punkte $(\tilde{x}_j, f(\tilde{x}_j))$, zur Klassifikation nutzen wir die zweite Ableitung:

	$c=1$			$c=2$		
Extremum	$(0,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(0,0)$	$\left(\frac{3}{2},\frac{81}{16}\right)$	$(3,0)$
$f_c''(\tilde{x}_j)$	8	-4	8	18	-9	18
VZ von f_c''	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
Typ	Minimum	Maximum	Minimum	Minimum	Maximum	Minimum

(d) Wir setzen weitere Punkte in

$$\begin{aligned} f_1(x) = x^2(x-2)^2\ ,\ f_1'(x) = 4x(2-x)(1-x) \\ f_2(x) = x^2(x-3)^2\ ,\ f_2'(x) = 2x(3-x)(3-2x) \end{aligned}$$

ein:

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{15}{4}$
$f_1(x)$	9	$--$	$\frac{25}{16}$	$\frac{9}{16}$	s.o.	$\frac{9}{16}$	s.o.	$\frac{25}{16}$	9	$--$	$--$
$f_1'(x)$	-24	$--$	$-\frac{15}{2}$	$\frac{3}{2}$	s.o.	$-\frac{3}{2}$	s.o.	$\frac{15}{2}$	24	$--$	$--$
$f_2(x)$	$--$	$\frac{2025}{256} = 8 - \frac{1}{16} - \frac{7}{256}$	$\frac{49}{16} = \frac{48+1}{16}$	$\frac{25}{16}$	4	s.o.	4	$\frac{25}{16}$	s.o.	$\frac{49}{16}$	$\frac{2025}{256}$
$f_2'(x)$	$--$	$--$	-14	5	4	s.o.	-4	-5	s.o.	14	$--$

führt auf die Skizze von f bei $c = 1$ und $c = 2$ ist in Abbildung 3 bereitgestellt. (Man beachte, dass das 1:2-Achsenverhältnis bei der Einzeichnung nicht verlangter, aber hilfreicher Tangenten berücksichtigt werden muss!)

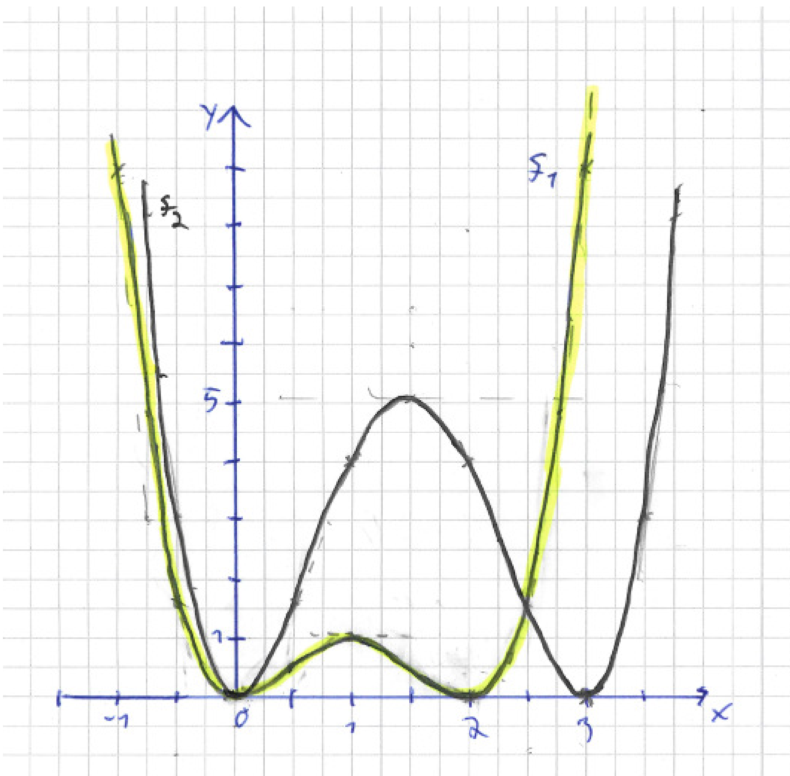

Abbildung 3: $f_c(x)$ mit $c = 1$ und $c = 2$

Aufgabe H 32. *Partielle Integration*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int e^{4x} \sin(2x) \, \mathrm{d}\, x$

(b) $\displaystyle\int_1^{e} (\ln(x))^2 \, \mathrm{d}\, x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mehrmalige Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{4x}\sin(2x)\,\mathrm{d}\,x &= \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}\sin(2x)\right] - \int \frac{1}{2}\mathrm{e}^{4x}\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}\sin(2x)\right] - \left(\left[\frac{1}{8}\mathrm{e}^{4x}\cos(2x)\right] - \int -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}\sin(2x)\,\mathrm{d}\,x\right)\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\frac{5}{4}\int \mathrm{e}^{4x}\sin(2x)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}\sin(2x) - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{4x}\cos(2x)\right]$$

und somit

$$\int \mathrm{e}^{4x}\sin(2x)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{5}\mathrm{e}^{4x}\sin(2x) - \frac{1}{10}\mathrm{e}^{4x}\cos(2x)\right]$$

(b) Wir beginnen mit partieller Integration $\int uv'\,\mathrm{d}\,x = [uv] - \int u'v\,\mathrm{d}\,x$, wobei wir

$$\begin{aligned}u(x) &:= (\ln x)^2 \\ v(x) &:= x\end{aligned}$$

wählen. Das Integral lautet dann

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^2\,\mathrm{d}\,x &= \left[x(\ln x)^2\right] - \int_1^{\mathrm{e}} 2\cdot 2\ln(x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \mathrm{e} - 2\int_1^{\mathrm{e}} ((2\ln x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \mathrm{e} - 2\left([x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x\right) \\ &= \mathrm{e} - 2\,(\mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1)) = \mathrm{e} - 2\end{aligned}$$

Aufgabe H 33. *Substitution mit Parameter*

Zu $d \in \mathbb{R}$ definieren wir $f_d\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ und $g_d\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{d\pi\} \to \mathbb{R}$ vermöge

$$\begin{aligned}f_d(t) &:= t^{1+d}\ln\left(t^2\cdot t^d\right) \\ g_d(t) &:= \frac{d}{\arctan(t - d\pi)\,(t^2 - 2d\pi t + 1 + d^2\pi^2)}\end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\displaystyle\int f_d(t)\,\mathrm{d}\,t$ und $\displaystyle\int g_d(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Substituiert man mit

$$u(t) = t^{d+2} \qquad , \; u'(t) = (d+2)t^{d+1}$$

so erhält man wegen $t > 0$ und somit $t = |t|$:

$d = -2$:

$$\int f_d(t)\,\mathrm{d}\,t = \int t^{-1}\ln(1)\,\mathrm{d}\,t = 0 + c = c$$

$d \neq -2$:

$$\begin{aligned}\int f_d(t)\,\mathrm{d}\,t &= \int \frac{1}{d+2}\ln u\,\mathrm{d}\,u \\ &= \left[\frac{1}{d+2}u\ln(u)\right] - \frac{1}{d+2}\int 1\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{d+2}(u(t)-1)\ln(u(t)) + c \\ &= \frac{1}{d+2}(t^{2+d}-1)\ln(t^{2+d}) + c\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg: Hier ginge auch partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int f_d(t)\,\mathrm{d}\,t = \int t^{1+d}\ln(t^{2+d})\,\mathrm{d}\,t &= \left[\frac{1}{d+2}t^{d+2}\ln(t^{d+2})\right] - \int t^{d+1}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[\frac{1}{d+2}t^{d+2}\ln(t) - \frac{1}{d+2}t^{d+2}\right]\end{aligned}$$

(b) Substituiert man mit

$$u(t) := t - d\pi \;,\; u'(t) = 1$$

führt dies auf

$$\int g_d(t)\,\mathrm{d}\,t = \int \frac{d}{\arctan(u)\,(1+u^2)}\,\mathrm{d}\,u$$

Substituiert man erneut mit

$$v(u) := \arctan(u) \to v'(u) = \frac{1}{(1+u^2)}$$

erhält man

$$\begin{aligned}\int g_d(t)\,\mathrm{d}\,t &= \int \frac{d}{v}\,\mathrm{d}\,v = d\ln\left(|\arctan(v)|\right) + c \\ &= d\ln(|\arctan(u)|) + c = d\ln(|\arctan(t-d\pi)|) + c.\end{aligned}$$

Hier ist keine Fallunterscheidung notwendig ist, da man nie durch d teilt.

Bemerkung: Man beachte die Betragsstriche: Da der Arkustangens auf dem Definitionsbereich von g_d negative Werte annehmen kann, dürfen diese nicht fehlen! (In (a) waren diese durch den Definitionsbereich $t^{d+2} > 0$ unnötig.)

Aufgabe H 34. *Alles in einem*

(a) Bestimmen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\frac{1}{4}\left(\sin(x)\right)^4$.

(b) Bestimmen Sie $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{4}(\sin(x))^4}\left(\sin(x)\right)^3\cos(x)\,\mathrm{d}\,x$ direkt mit 3.3.3.

(c) Bestimmen Sie $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{4}(\sin(x))^4}\left(\sin(x)\right)^7\cos(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit Kettenregel folgt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\frac{1}{4}\left(\sin(x)\right)^4 = \sin(x)^3\cos(x)$

(b) Wir substituieren mit

$$u(x) = \frac{1}{4}\left(\sin(x)\right)^4 \qquad\qquad u'(x) = \sin(x)^3\cos(x)$$

und erhalten mit $u(0) = 0$ und $u\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nach 3.3.3

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{4}(\sin(x))^4}\left(\sin(x)\right)^3\cos(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}\,u = \left[\mathrm{e}^u\right]_1^{\frac{1}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}} - 1$$

(c) Mit Hilfe der gleichen Substitution sowie partieller Integration wird das Integral

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{4}(\sin(x))^4}\left(\sin(x)\right)^{4+3}\cos(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{1}{4}} 4u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}\,u = \left[4u\mathrm{e}^u\right]_0^{\frac{1}{4}} - \int\limits_0^{\frac{1}{4}} 4\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}\,u$$
$$= \left[4u\mathrm{e}^u - 4\mathrm{e}^u\right]_0^{\frac{1}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}} - 4\mathrm{e}^{\frac{1}{4}} + 4 = 4 - 3\sqrt[4]{\mathrm{e}}.$$

Alternativer Lösungsweg: Die partielle Integration kann auch direkt verwendet werden: Setzt man $u(x) := \mathrm{e}^{\frac{1}{4}(\sin(x))^4}$ und $v(x) := \left(\sin(x)\right)^4$, so gilt:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{4}(\sin(x))^4}\left(\sin(x)\right)^{4+3}\cos(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}\,x = \left[u(x)v(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{4}(\sin(x))^4}\left(\sin(x)\right)^4\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$- 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{4}(\sin(x))^4}\left(\sin(x)\right)^3\cos(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \mathrm{e}^{\frac{1}{4}} - 4\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}} - 1\right) = 4 - 3\sqrt[4]{\mathrm{e}}.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 35. *Potenzreihen*

Führen Sie eine reelle Faktorisierung für folgende Polynome durch:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad\qquad g(x) = x^5 + 10x^3 + 25x$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit Hilfe der Mitternachtsformel $\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2}$ finden wir für das Polynom $X^2 - 3X + 2$ die Nullstellen $x_1 = 1, x_2 = 2$ und erhalten

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1).$$

(b) Es ist

$$x^5 + 10x^3 + 25x = x(x^4 + 10x^2 + 25) = x(x^2+5)^2,$$

was nicht weiter faktorisiert werden kann wegen $x^2 + 5 > 0$.