Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 36. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie die folgenden, uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen zunächst eine Stammfunktion im Intervall $(1,+\infty)$. Dazu substituieren wir $x = \mathrm{e}^u$ mit $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,u} = \mathrm{e}^u$:

$$\int \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{\mathrm{e}^u u^2}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}\,u = \int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}\,u = \left[-\frac{1}{u}\right] = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right].$$

Für das uneigentliche Integral gilt dann:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{a\to 1+0}\frac{1}{\ln(a)} - \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\ln(b)}.$$

Während $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{\ln(b)} = 0$ konvergiert, gilt $\lim\limits_{a\to 1+0}\frac{1}{\ln(a)} = +\infty$. Also divergiert das uneigentliche Integral.

(b) Nach erster binomischer Formel können wir den Nenner zu $(x+2)^2+2$ umschreiben. Damit folgt:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{(x+2)^2+2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}\,x.$$

Wir substituieren $u = \frac{x+2}{\sqrt{2}}$ und erhalten

$$\int \frac{1}{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(u)] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{b+2}{\sqrt{2}}\right) - \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{a+2}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Aufgabe H 37. *Integration durch Partialbruchzerlegung*

Gegeben sei $f(x) = \dfrac{x^5 + 4x^3}{x^4 + x^2 + 1}$.

(a) Bestimmen Sie eine reelle Faktorisierung des Polynoms $X^4 + X^2 + 1$.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Nullstellen dieses Polynoms.

(b) Finden Sie eine eine Stammfunktion von $f(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Um die Nullstellen zu berechnen, definieren wir zunächst $z = X^2$. Das Problem reduziert sich dadurch auf eine quadratische Gleichung: $z^2 + z + 1 = 0$. Von dieser berechnen wir die Nullstellen:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wegen $z = X^2$ suchen wir also solche $X \in \mathbb{C}$, für die gilt

$$\begin{aligned} X^2 &= -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{oder} \quad X^2 &= -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Wir erhalten also die folgenden vier komplexen Nullstellen:

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ X_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ X_3 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ X_4 &= \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= (X - X_1)(X - X_4)(X - X_2)(X - X_3) \\ &= \left(\left(X - \tfrac{1}{2}\right) - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\left(X - \tfrac{1}{2}\right) + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\left(X + \tfrac{1}{2}\right) + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\left(X + \tfrac{1}{2}\right) - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\left(X - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\right)\left(\left(X + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\right) = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1). \end{aligned}$$

(b) Wir stellen fest, dass der Grad des Zählers größer als der Grad des Nenners ist. Wir führen daher eine Polynomdivision durch und erhalten $\frac{x^5+4x^3}{x^4+x^2+1} = x + \frac{3x^3-x}{x^4+x^2+1}$. Eine Stammfunktion von x ist gegeben durch $\frac{1}{2}x^2$. Für den zweiten Teil setzen wir eine Partialbruchzerlegung an:

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 - x}{x^4 + x^2 + 1} &= \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{(A + C)x^3 + (A + B - C + D)x^2 + (A + B + C - D)x + B + D}{x^4 + x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$A + C = 3, \quad A + B - C + D = 0, \quad A + B + C - D = -1, \quad B + D = 0.$$

Dieses System hat die Lösung $A = C = \frac{3}{2}$, $B = -2$ und $D = 2$, somit gilt

$$\begin{aligned}\frac{3x^3 - x}{x^4 + x^2 + 1} &= \frac{\frac{3}{2}x - 2}{x^2 - x + 1} + \frac{\frac{3}{2}x + 2}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{3}{4}\left[\frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} - \frac{\frac{5}{3}}{x^2 - x + 1} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{\frac{5}{3}}{x^2 + x + 1}\right]\end{aligned}$$

und mit den Formeln aus der Vorlesung (Lemma 3.4.8 und Lemma 3.4.9) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5 + 4x^3}{x^4 + x^2 + 1}\,\mathrm{d}\,x =& \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}\ln(x^4 + x^2 + 1) \\ & - \frac{5}{6}\sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C.\end{aligned}$$

Aufgabe H 38. *Integration*

Gegeben sei $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{4 - 2x^3}{1 + x^2}$.

(a) Geben Sie die Vorzeichenverteilung der Ableitung f' sowie ein lokales Maximum von f an.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen die erste Ableitung mittels der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{-6x^2(1 + x^2) - 2x(4 - 2x^3)}{(1 + x^2)^2} = \frac{-2x(x^3 + 3x + 4)}{(1 + x^2)^2}.$$

Der Nenner der Ableitung ist offensichtlich stets positiv, ändert also nichts an dem Vorzeichen von f'. Es genügt daher, den Zähler zu betrachten. Dabei handelt es sich um ein Polynom vierten Grades mit der offensichtlichen Nullstelle $x_1 = 0$. Wir berechnen die weiteren Nullstellen, also die Lösung(en) von $x^3 + 3x + 4 = 0$. Durch geschicktes Raten finden wir die Nullstelle $x_2 = -1$ und führen eine Polynomdivision durch: $\frac{x^3+3x+4}{x+1} = x^2 - x + 4$. Dieses Polynom zweiten Grades besitzt keine weiteren reellen Nullstellen und ist daher immer positiv.

Damit reduziert sich die Vorzeichenverteilung von f' auf die Vorzeichenverteilung der Funktion $g(x) = -2x(x + 1)$. g ist dabei negativ für $x > 0$, positiv für $-1 < x < 0$ und wieder negativ für $x < -1$. Aufgrund dieser Vorzeichenverteilung von f' können wir direkt schließen, dass f bei $x = -1$ ein lokales Minimum und bei $x = 0$ ein lokales Maximum besitzt. Wir bestimmen noch den Funktionswert zum lokalen Maximum: $f(0) = 4$.

(b) Mittels Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{4-2x^3}{1+x^2} = -2x + \frac{2x+4}{1+x^2} = -2x + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4}{1+x^2}$$

und somit

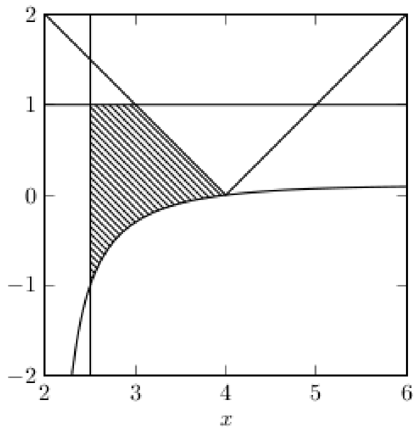
$$\int_{-1}^{1} \frac{4-2x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \left[-x^2 + \ln(1+x^2) + 4\arctan(x)\right]_{-1}^{1}$$
$$= 4(\arctan(1) - \arctan(-1)) = 2\pi.$$

Aufgabe H 39. *Integrale und Flächeninhalte*

Die Funktionen $f, g, h\colon (2,\infty) \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$f(x) = 1\,, \qquad g(x) = |4-x| \qquad \text{und} \qquad h(x) = \frac{\frac{3}{2}(x-4)}{x^2-4}.$$

Betrachten Sie dazu nebenstehende grobe Skizze.



(a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen dieser Funktionen.

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von h.

(c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des schraffierten Bereichs in der Skizze.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Schnittpunkte der Graphen von f und g: Wir lösen die Gleichung $1 = |4-x|$. Das bedeutet gerade, dass x den Abstand 1 zu 4 hat, also $x_1 = 3$ oder $x_2 = 5$. Die Schnittpunkte sind somit gegeben durch $S_1 = (3,1)$ und $S_2 = (5,1)$.

Schnittpunkte zwischen g und h: Wir lösen die Gleichung $|4-x| = \frac{\frac{3}{2}(x-4)}{x^2-4}$. Diese Gleichung ist offenbar erfüllt für $x = 4$, wir erhalten damit den Schnittpunkt $S_3 = (4,0)$. Ist $x > 4$, so können wir durch $x-4$ teilen und mit x^2-4 multiplizieren und erhalten $x^2 - 4 = \frac{3}{2}$. Diese Gleichung hat für $x > 4$ allerdings keine Lösung.

Für $x < 4$ gehen wir genauso vor und erhalten $x^2 - 4 = -\frac{3}{2}$, also $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} < 2$, also nur Lösungen außerhalb des Definitionsbereichs.

Schnittpunkte von f und h: Wir lösen die Gleichung $1 = \frac{\frac{3}{2}(x-4)}{x^2-4}$. Multiplikation mit x^2-4 ergibt $x^2 - 4 = \frac{3}{2}x - 6$. Diese quadratische Gleichung besitzt keine reelle Lösung, also haben f und h keinen Schnittpunkt.

(b) Mit der dritten binomischen Formel faktorisieren wir den Nenner zu $x^2-4 = (x+2)(x-2)$ und setzen die Partialbruchzerlegung an:

$$\frac{\frac{3}{2}x - 6}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x + 2(B-A)}{(x+2)(x-2)}.$$

Der Koeffizientenvergleich impliziert $A + B = \frac{3}{2}$ und $2(B-A) = -6$, also $B = -\frac{3}{4}$ und $A = \frac{9}{4}$.

(c) Wir unterteilen den Bereich zunächst entlang der x-Achse. Der Bereich über der x-Achse A_+ besteht nur aus einem Rechteck und einem Dreieck, der Flächeninhalt lässt sich hier elementar (ohne Integral) berechnen: $A_+ = \left(3 - \frac{5}{2}\right) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (4-3) \cdot 1 = 1$.
Für den Bereich A_- unter der x-Achse integrieren wir h – da es sich bei dem Integral stets um eine orientierte Fläche handelt, müssen wir noch einmal mit -1 multiplizieren:

$$\begin{aligned}
A_- &= -\int_{\frac{5}{2}}^{4} h(x)\,\mathrm{d}\,x = -\tfrac{9}{4}\int_{\frac{5}{2}}^{4} \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}\,x + \tfrac{3}{4}\int_{\frac{5}{2}}^{4} \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[-\tfrac{9}{4}\ln|x+2| + \tfrac{3}{4}\ln|x-2|\right]_{\frac{5}{2}}^{4} \\
&= -\tfrac{9}{4}\ln(6) + \tfrac{3}{4}\ln(2) + \tfrac{9}{4}\ln\left(\tfrac{9}{2}\right) - \tfrac{3}{4}\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \\
&= -\tfrac{9}{4}\ln(2) - \tfrac{9}{4}\ln(3) + \tfrac{3}{4}\ln(2) + \tfrac{9}{2}\ln(3) - \tfrac{9}{4}\ln(2) + \tfrac{3}{4}\ln(2) \\
&= -3\ln(2) + \tfrac{9}{4}\ln(3).
\end{aligned}$$

Die ganze Fläche hat also den Inhalt $A_+ + A_- = 1 - 3\ln(2) + \frac{9}{4}\ln(3)$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 40. *Vollständige Induktion*
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-2x}$. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{2^n n!}{(1-2x)^{n+1}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lösungshinweise hierzu:

IA $n = 1$: Es gilt nach der Kettenregel:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1-2x)^2} \cdot (-2) = \frac{2}{(1-2x)^2} = \frac{2^1 \cdot 1!}{(1-2x)^{1+1}}.$$

IH : Die Formel gilt für ein beliebiges festes $n \in \mathbb{N}$.

IS : $n \to n+1$: Wieder mit der Kettenregel berechnen wir

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(f^{(n)}(x)\right) \overset{\text{IH}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{2^n n!}{(1-2x)^{n+1}}\right) = 2^n n!(-n-1)(1-2x)^{-n-2} \cdot (-2) \\
&= \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(1-2x)^{(n+1)+1}}.
\end{aligned}$$