

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 41. Gamma-Funktion

Wie in der Vorlesung sei die Gamma-Funktion definiert durch

$$\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_{0+0}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

- (a) Zeigen Sie durch partielle Integration: Für alle $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(b) Folgern Sie aus (a) per vollständiger Induktion, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
(c) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(x)} dx$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Für $x > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} [-e^{-t} t^x]_0^a - \int_{0+0}^{+\infty} -e^{-t} x t^{x-1} dt \\ &= 0 + x \int_{0+0}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

- (b) **IA** Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^a = 0 - (-1) = 1 = 0!.$$

- IH** Für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$.

- IS** $n \rightarrow n+1$: Es gilt nach (a)

$$\Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) \stackrel{\text{IH}}{=} (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

- (c) Wir verwenden das Integral-Vergleichskriterium. Wir zeigen zunächst, dass die Gamma-Funktion auf $[1, +\infty)$ monoton wachsend ist. Dazu seien $x, y \geq 1$ mit $x \leq y$. Da dann für alle $t \geq 1$ die Ungleichung $t^{x-1} \leq t^{y-1}$ gilt, folgt für die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) = \int_{0+0}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_{0+0}^{+\infty} e^{-t} t^{y-1} dt = \Gamma(y).$$

Da also Γ in $[1, +\infty)$ monoton wächst, muss $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(x)}$ in $[1, +\infty)$ monoton fallend sein.

Nach dem Integral-Vergleichskriterium hat das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(x)} dx$ das gleiche Konvergenzverhalten wie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Das uneigentliche Integral muss also konvergieren.

Aufgabe H 42. Ober- und Untersummen

Gegeben sei die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sowie die Partitionen

$$P_n = \left\{ \frac{k}{n} \mid k = 0, 1, 2, \dots, n \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}.$$

- (a) Bestimmen Sie $\underline{S}(f, P_n)$ und $\overline{S}(f, P_n)$.
 (b) Argumentieren Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, P_n)$.
 (c) Bestimmen Sie den Grenzwert aus (b).

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Die Funktion f ist monoton fallend. Daraus folgt, dass auf einem Intervall $[a, b] \subseteq [0, 1]$ das Supremum jeweils in a und das Infimum in b angenommen wird. Die Partition P_n unterteilt das Intervall $[0, 1]$ in n gleich große Intervall der Länge $\frac{1}{n}$, für die Ober- und Untersummen erhalten wir also

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \inf \left\{ f(x) \mid x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \\ \overline{S}(f, P_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sup \left\{ f(x) \mid x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}. \end{aligned}$$

- (b) Es gilt

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Die beiden Grenzwerte von Ober- und Untersummen müssen also übereinstimmen.

- (c) Da die beiden Grenzwerte in (b) übereinstimmen, ist f in $[0, 1]$ Riemann-integrierbar und der Grenzwert ist genau das Riemann-Integral über f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

Aufgabe H 43. Konvergenzkriterien

Entscheiden Sie jeweils, gegebenenfalls in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha > 0$, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren. Sie müssen dabei keine Grenzwerte angeben.

(a) $\int_2^{+\infty} \frac{2x^3}{x^\alpha - 1} dx$

(b) $\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx$

Hinweis: Zu (b): Schreiben Sie zunächst $\sin(x^2) = 2x \sin(x^2) \cdot \frac{1}{2x}$ und integrieren Sie partiell.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Variante 1: Intuitiv fällt für große x die -1 im Nenner nicht mehr ins Gewicht, es ist also zu erwarten, dass das Konvergenzverhalten das gleiche ist wie von $\int_2^{+\infty} 2x^{3-\alpha} dx$. Formal rechtfertigen wir dieses Vorgehen mit dem Grenzwertkriterium 3.7.11: Sowohl $\frac{2x^3}{x^\alpha}$ als auch $x^{3-\alpha}$ sind im Integrationsgebiet positiv und stetig. Wir betrachten den Grenzwert des Quotienten (der Vorfaktor 2 ist dabei optional):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^\alpha - 1}}{x^{3-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 - x^{-\alpha}} = 2 > 0.$$

Also haben die Integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{2x^3}{x^\alpha - 1} dx \quad \text{und} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-3}} dx$$

dasselbe Konvergenzverhalten. Für das zweite Integral ist bekannt, dass es konvergiert genau dann, wenn $\alpha - 3 > 1$ bzw. genau dann, wenn $\alpha > 4$ gilt.

Variante 2: Alternativ kommt man mit dem Majoranten-/Minoranten-Kriterium zu dem gleichen Schluss: Für $\alpha > 4$ und $x \geq 2$ schätzen wir ab $x^\alpha - 1 \geq \frac{1}{2}x^\alpha$ und somit

$$\int_2^{+\infty} \frac{2x^3}{x^\alpha - 1} dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{4x^3}{x^\alpha} dx = \int_2^{+\infty} \frac{4}{x^{\alpha-3}} dx.$$

Dieses Integral konvergiert, da $\alpha - 3 > 1$ nach Annahme. Für das ursprüngliche Integral verwenden wir das Majorantenkriterium.

Andererseits schätzen wir für $\alpha \leq 4$ ab:

$$\int_2^{+\infty} \frac{2x^3}{x^\alpha - 1} dx \geq \int_2^{+\infty} \frac{2x^3}{x^\alpha} dx = \int_2^{+\infty} \frac{2}{x^{\alpha-3}} dx.$$

Dieses Integral divergiert, da $\alpha - 3 \leq 1$ und mit dem Minorantenkriterium folgt, dass auch das ursprüngliche Integral divergiert.

- (b) Wir verwenden den Hinweis und integrieren partiell mit $u'(x) = 2x \sin(x^2)$ und $v(x) = \frac{1}{2x}$:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} 2x \sin(x^2) \cdot \frac{1}{2x} dx &= \left[-\cos(x^2) \cdot \frac{1}{2x} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\cos(x^2) \cdot \left(-\frac{1}{2x^2} \right) dx \\ &= -\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos(a^2)}{2a} \right) + \frac{1}{2} \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Das letzte Integral konvergiert nach dem Majorantenkriterium, da $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ konvergiert und wir abschätzen können:

$$\left| \frac{\cos(x^2)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Damit muss auch das ursprüngliche Integral konvergieren.

Aufgabe H 44. *Integration durch Partialbruchzerlegung*

Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$.

Lösungshinweise hierzu: Wir faktorisieren zunächst den Nenner. Durch geschicktes Raten finden wir die Nullstelle $x_1 = 2$. Polynomdivision ergibt dann

$$\frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x - 2} = x^2 + x - 6,$$

die beiden weiteren Nullstellen sind also

$$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}},$$

das heißt $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$. Es gilt also $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)^2(x + 3)$ und wir setzen eine Partialbruchzerlegung an:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 2)^2(x + 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{x + 3} = \frac{(A + C)x^2 + (A + B - 4C)x - 6A + 3B + 4C}{(x - 2)^2(x + 3)}.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + C &= 1 \\ A + B - 4C &= -3 \\ -6A + 3B + 4C &= 2, \end{aligned}$$

welches die eindeutige Lösung $A = \frac{1}{5}$, $B = 0$ und $C = \frac{4}{5}$ hat. Es folgt:

$$\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx = \int \frac{\frac{1}{5}}{x - 2} dx + \int \frac{\frac{4}{5}}{x + 3} dx = \frac{1}{5} \ln |x - 2| + \frac{4}{5} \ln |x + 3| + C.$$

Frischhaltebox**Aufgabe H 45.** *Quadrik, euklidische Normalform*

Gegeben sei die Quadrik $Q := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 2xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 3\}$.
Bestimmen Sie eine euklidische Normalform für Q .

Lösungshinweise hierzu: In Matrixschreibweise $x^T A x + 2a^T x + c = 0$ haben wir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = -3.$$

A hat das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$ und somit die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Zugehörige (normierte) Eigenvektoren sind (bis auf Vorzeichen)

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für $y = Fx$, wobei $F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, und $\tilde{a} = F^T a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir somit

$$y_1^2 - y_2^2 + 2y_1 - 3 = 0.$$

Für y_1 ist noch eine quadratische Ergänzung notwendig: $y_1^2 + 2y_1 = (y_1 + 1)^2 - 1$.

Mit $z_1 = y_1 + 1$ und $z_2 = y_2$ folgt

$$z_1^2 - z_2^2 - 4 = 0,$$

als euklidische Normalform erhalten wir somit $-\frac{1}{4}z_1^2 + \frac{1}{4}z_2^2 + 1 = 0$.