Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 46. *Topologische Eigenschaften*

Gegeben sei die Menge $M := \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup ([0,1] \times [0,1]) \subseteqq \mathbb{R}^2$.

(a) Skizzieren folgende Teilmenge von M: $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \leqq 5 \right\} \cup ([0,1] \times [0,1])$.

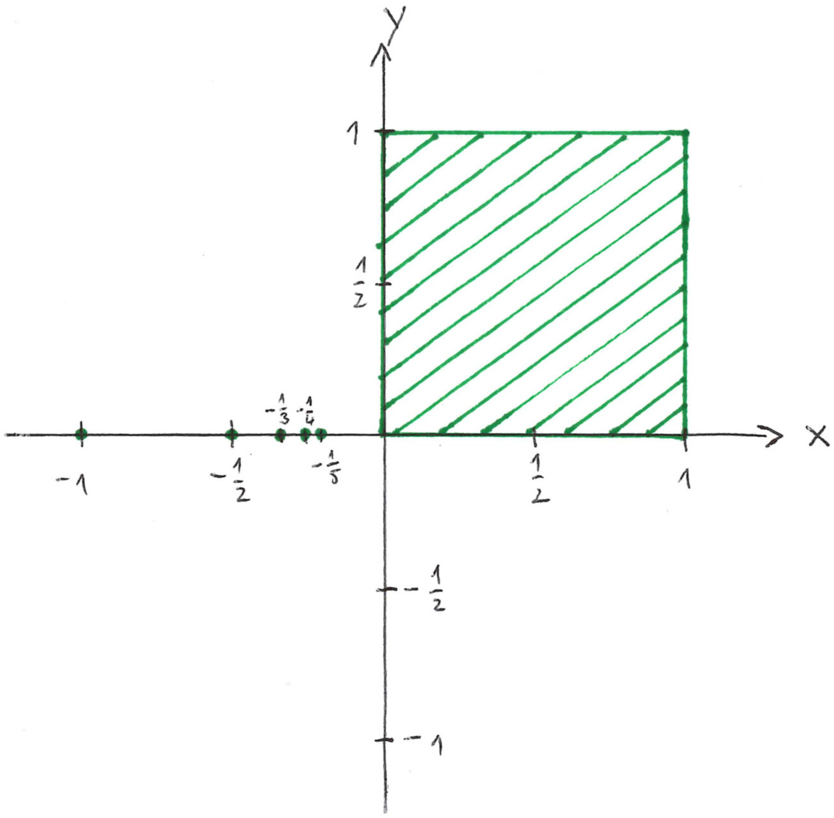
(b) Bestimmen Sie die inneren Punkte von M.

(c) Bestimmen Sie die Randpunkte von M.

(d) Ist M kompakt?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Eine Skizze der beschriebenen Teilmenge sieht wie folgt aus:



(b) Wir betrachten zunächst solche Punkte $p \in M$, die auf der x-Achse liegen. Dann ist in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(p)$ von p auf jeden Fall ein Punkt mit negativer y-Komponente enthalten. Dieser kann unmöglich wieder in M sein. Die Punkte auf der x-Achse sind folglich keine inneren Punkte von M. Gleiches gilt für Punkte auf der Geraden $y = 1$: Jede Umgebung enthält immer einen Punkt, dessen y-Koordinate größer als 1 ist und folglich ebenfalls nicht in M liegen kann. Analog kann man die Gerade $x = 1$ behandeln. Wir betrachten noch Punkte $p = (0, y)^\intercal \in M$, das heißt Punkte die auf der y-Achse liegen. Wir wissen bereits, dass $(0,0)^\intercal$ kein innerer Punkt von M ist (er liegt auf der x-Achse), daher betrachten wir hier nur den Fall $y > 0$. Ein einer beliebigen ε-Umgebung $U_\varepsilon(p)$ liegt dann auf jeden Fall auch der Punkt $\left(-\frac{\varepsilon}{2}, y\right)^\intercal$; da wir $y \neq 0$ angenommen haben, kann dieser Punkt nicht in M liegen. Als Kandidaten für die inneren Punkte von M bleiben somit nur noch die Punkte in $(0,1)\times(0,1)$.

Die Punkte in $(0,1)\times(0,1)$ sind tatsc̈hlich die inneren Punkte von M: Falls $(x,y)^\intercal$ ein solcher Punkt ist, wählen wir uns ε als den (kleinsten) Abstand von $(x,y)^\intercal$ zum „Rand“, genauer:

$$\varepsilon := \min\{x, y, 1-x, 1-y\}.$$

Dadurch ist sichergestellt, dass $U_\varepsilon\left((x,y)^\intercal\right)$ eine Teilmenge von M ist.

(c) Die inneren Punkte von M können auf keinen Fall Randpunkte sein. Gleichzeitig sind alle Punkte in M, die keine inneren Punkte sind, automatisch Randpunkte, also hier

$$(\{0,1\}\times[0,1])\cup([0,1]\times\{0,1\})\cup\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{n}\\ 0\end{pmatrix}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Wir argumentieren noch, dass es keine weiteren Randpunkte von M gibt: Sei $(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus M$ ein beliebiger Punkt, der nicht in M liegt. Ist $x>1$, so enthält mit $\varepsilon = 1-x$ die Umgebung $U_\varepsilon\left((x,y)^\intercal\right)$ keinen Punkt in M, also kann $(x,y)^\intercal$ kein Randpunkt von M sein. Genauso verhält es sich mit Punkten $(x,y)^\intercal$ mit $y>1$ (wähle $\varepsilon = y-1$), $y<0$ (wähle $\varepsilon=-y>0$) und $x<0, y>0$ (wähle $\varepsilon = \min\{-x,y\}>0$).

Es bleibt noch, die Punkte $(x,y)^\intercal \notin M$ mit $x<0$ und $y=0$ zu betrachten. Ist $x<-1$, gehen wir wieder wie oben vor (mit $\varepsilon=-1-x>0$). Sei also $-1\leqq x<0$. Da der Punkt nicht in M liegt, muss es ein $n\in\mathbb{N}$ geben, so dass $-\frac{1}{n}<x<-\frac{1}{n+1}$ gilt. Wir wählen dann ε wieder als den kleinstmöglichen Abstand den der Punkt zu M haben kann, also $\varepsilon = \min\left\{x+\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}-x\right\}$.

(d) Da alle Randpunkte von M nach **(c)** schon in M enthalten sind, ist der Abschluss von M gleich M:

$$\overline{M} = M\cup\partial M = M.$$

Folglich ist die Menge M abgeschlossen. Sie ist auch beschränkt, da zum Beispiel gilt $M\subsetneqq U_2(0)$. Damit ist M kompakt.

Aufgabe H 47. *Stetigkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen*
Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y,z)^\intercal = (0,0,0)^\intercal, \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^4+z^8} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie für jeden Punkt $(x_0,y_0,z_0)^\intercal \in \mathbb{R}^3$, dass die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto f\left((tx_0,ty_0,tz_0)^\intercal\right)$$

stetig ist.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f\left((\frac{1}{n^4},\frac{1}{n^2},\frac{1}{n})^\intercal\right)$.

(c) Ist f stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wenn $(x_0,y_0,z_0)^\intercal = (0,0,0)^\intercal$, gilt $g(t) = \left((0,0,0)^\intercal\right) = 0$, also ist g eine konstante Funktion und somit stetig. Andernfalls nehmen wir an, dass mindestens eines der x_0, y_0, z_0 ungleich null ist. Für $t \neq 0$ gilt

$$g(t) = \frac{(tx_0)(ty_0)^2}{(tx_0)^2+(ty_0)^4+(tz_0)^8} = \frac{t^3x_0y_0^2}{t^2x_0^2+t^4y_0^4+t^8z_0^8} = t\frac{x_0y_0^2}{x_0^2+t^2y_0^4+t^6z_0^8}. \tag{2}$$

Beachte, dass der Nenner hier von null verschieden ist, solange $t \neq 0$ gilt. Inbesondere ist g an jedem Punkt $t_0 \neq 0$ stetig. Um zu zeigen, dass sie auch an dem Punkt $t_0 = 0$ stetig ist, müssen wir zeigen, dass $g(t) \to 0$ für $t \to 0$ gilt. Falls $x_0 = 0$, so ist $g(t) = 0$ für alle t. Andernfalls ist der Betrag des Bruchs auf der rechten Seite von (2) nach oben beschränkt durch $C = \frac{|x_0|y_0^2}{x_0^2}$, und somit gilt $|g(t)| \leqq C|t|$, was gegen null geht für $t \to 0$.

(b) Wir berechnen:

$$f\left(\left(\frac{1}{n^4},\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)^\intercal\right) = \frac{\frac{1}{n^4}\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^8}+\frac{1}{n^8}+\frac{1}{n^8}} = \frac{\frac{1}{n^8}}{\frac{3}{n^8}} = \frac{1}{3},$$

und daher $\lim\limits_{n\to\infty} f\left((\frac{1}{n^4},\frac{1}{n^2},\frac{1}{n})^\intercal\right) = \frac{1}{3}$.

(c) Die Reihenfolge $(\frac{1}{n^4},\frac{1}{n^2},\frac{1}{n})^\intercal$ konvergiert gegen $(0,0,0)^\intercal$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\left(\frac{1}{n^4},\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)^\intercal\right) = \frac{1}{3} \neq 0 = f\left((0,0,0)^\intercal\right),$$

was bedeutet, dass f bei $(0,0,0)^\intercal$ nicht stetig ist.

Aufgabe H 48. *Partielle Ableitungen*
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,t) \mapsto t^2\mathrm{e}^{2x}\cos(xy+t)$. Berechnen Sie die folgenden partielle Ableitungen:

(a) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y,t)$

(b) $f_{yt}(x,y,t)$

(c) $\mathrm{D}^{(1,0,0)}\mathrm{D}^{(0,2,0)} f(x,y,t)$

(d) $\partial_v f(0,1,\pi)$ für $v = (1,2,-1)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,t) &= -xt^2\mathrm{e}^{2x}\sin(xy+t),\\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(-xt^2\mathrm{e}^{2x}\sin(xy+t)\big)\\
&= -t^2\mathrm{e}^{2x}\sin(xy+t) - 2xt^2\mathrm{e}^{2x}\sin(xy+t) - xyt^2\mathrm{e}^{2x}\cos(xy+t)\\
&= -t^2\mathrm{e}^{2x}\left((1+2x)\sin(xy+t) + xy\cos(xy+t)\right).
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
f_{yt}(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\big(-xt^2\mathrm{e}^{2x}\sin(xy+t)\big)\\
&= -2xt\mathrm{e}^{2x}\sin(xy+t) - xt^2\mathrm{e}^{2x}\cos(xy+t)\\
&= -xt\mathrm{e}^{2x}\left(2\sin(xy+t) + t\cos(xy+t)\right).
\end{aligned}$$

(c) Dank des Satzes von Schwarz ist $\mathrm{D}^{(1,0,0)}\mathrm{D}^{(0,2,0)} f(x,y,t) = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(x,y,t)$ gleich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y,t)\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\big(-t^2\mathrm{e}^{2x}\left((1+2x)\sin(xy+t) + xy\cos(xy+t)\right)\big)\\
&= -t^2\mathrm{e}^{2x}\big((1+2x)x\cos(xy+t) + x\cos(xy+t) - x^2y\sin(xy+t)\big)\\
&= -xt^2\mathrm{e}^{2x}\left(2(1+x)\cos(xy+t) - xy\sin(xy+t)\right).
\end{aligned}$$

(d) Zunächst berechnen wir $f_x(x,y,t)$ und $f_t(x,y,t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,t) &= 2t^2\mathrm{e}^{2x}\cos(xy+t) - yt^2\mathrm{e}^{2x}\sin(xy+t)\\
&= t^2\mathrm{e}^{2x}\left(2\cos(xy+t) - y\sin(xy+t)\right),\\
\frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) &= 2t\mathrm{e}^{2x}\cos(xy+t) - t^2\mathrm{e}^{2x}\sin(xy+t)\\
&= t\mathrm{e}^{2x}\left(2\cos(xy+t) - t\sin(xy+t)\right).
\end{aligned}$$

Dank 4.3.12 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\partial_v f(0,1,\pi) &= f_x(0,1,\pi)v_1 + f_y(0,1,\pi)v_2 + f_t(0,1,\pi)v_3\\
&= (-2\pi^2)(1) + (0)(2) + (-2\pi)(-1)\\
&= 2\pi - 2\pi^2 = -2\pi(\pi-1).
\end{aligned}$$

Aufgabe H 49. *Gradient und Richtungsableitung*

In Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f^\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f^\alpha \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) = \mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2 y^2}.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f^α.

(b) Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen von f^α an der Stelle $(1,1)^\intercal$ in der Richtung $(1,-2)^\intercal$.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ wird die Steigung in **(b)** maximal?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Den Gradienten von f^α berechnen wir mit der Kettenregel:

$$\nabla f^\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2 y^2} \cdot (-2\alpha^2 y^2 x) \\ \mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2 y^2} \cdot (-2\alpha^2 x^2 y) \end{pmatrix} = -2\alpha^2 xy\, \mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2 y^2} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

(b) Wir normieren den Richtungsvektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$: $v := \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$. Die gesuchte Steigung s_α ist dann gerade die Richtungsableitung von f^α in Richtung v im Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, also

$$s_\alpha = \partial_v f^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \nabla f^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot v = -\frac{2}{\sqrt{5}} \alpha^2\, \mathrm{e}^{-\alpha^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}} \alpha^2\, \mathrm{e}^{-\alpha^2}.$$

(c) Wir berechnen zunächst die kritischen Stellen für lokale Extrema von s_α. Dazu leiten wir s_α nach α ab und setzen gleich null:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\alpha} s_\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \alpha^2\, \mathrm{e}^{-\alpha^2} \cdot (-2\alpha) + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 2\alpha\, \mathrm{e}^{-\alpha^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} (\alpha - \alpha^3) \mathrm{e}^{-\alpha^2} = 0.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$. Insbesondere müssen alle lokalen Maximalstellen unter diesen drei Werten sein. Wir vergleichen daher die zugehörigen Steigungen:

$$s_{-1} = s_1 = \frac{2}{\mathrm{e}\sqrt{5}}, \quad s_0 = 0.$$

Daher müssen an den Stellen $\alpha = -1$ und $\alpha = 1$ lokale Maxima vorliegen, an der Stelle $\alpha = 0$ dagegen ein lokales Minimum. Tatsächlich handelt es sich sogar um globale Extrema, da es keine weiteren kritischen Stellen gibt und s_α (nach L'Hospital) das folgende Grenzverhalten aufweist:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} s_\alpha = \lim_{\alpha \to -\infty} s_\alpha = \lim_{\beta \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{5}} \beta \mathrm{e}^{-\beta} = \lim_{\beta \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{1}{\mathrm{e}^\beta} = 0 < \frac{2}{\mathrm{e}\sqrt{5}}.$$

Die maximale Steigung wird also für $\alpha = -1$ und $\alpha = 1$ angenommen (und beträgt $s_{-1} = s_1 = \frac{2}{\mathrm{e}\sqrt{5}}$).

Frischhaltebox

Aufgabe H 50. *Eigenwerte und positive Definitheit*

Gegeben sei die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie die Eigenwerte von A und entscheiden Sie ob A positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

Lösungshinweise hierzu: Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(t) = t^2 - \mathrm{Sp}(A)t + \det(A) = t^2 - 2t - 24 = (t-6)(t+4),$$

also sind die Eigenwerte von A gleich 6 und -4. Das bedeutet, dass A in einer geeigneten Basis die Form $\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{smallmatrix}\right)$ hat und somit indefinit ist.