Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 66. *Diagonalisierbarkeit*

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A und B.

(b) Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie, wenn möglich, für $X \in \{A, B\}$ jeweils eine reguläre Matrix S und eine Diagonalmatrix D, so dass $S^{-1}XS = D$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) <u>**Matrix** A</u>

Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet [Entwicklung nach der ersten Zeile]:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_3) \\ &= (-1-\lambda)\big((5-\lambda)(1-\lambda)+3\big) - 3\big(-3(1-\lambda)-3\big) - 1\big(-9+3(5-\lambda)\big) \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4. \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms (die Eigenwerte von A) sind

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{mit den algebraischen Vielfachheiten} \quad e_1 = 1 \quad \text{und} \quad e_2 = 2\,.$$

[Gemäß 1.8.10 der Vorlesung haben wir zuerst unter den Teilern des konstanten Terms nach Nullstellen gesucht – und dort die Nullstellen λ_1 und λ_2 gefunden. Dass der Eigenwert 2 ein zweites Mal auftaucht, ergibt sich am schnellsten aus der Formel $5 = \mathrm{Sp}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + \lambda_3$, siehe 6.2.3 der Vorlesung.]

Die Eigenvektoren v_k zu diesen Eigenwerten erhält man durch Lösen des entsprechenden LGS

$$(A - \lambda_k E_3)v = 0, \quad \text{für } k \in \{1, 2\}.$$

Für $\lambda_1 = 1$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich der Eigenraum ergibt als

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Analog ergibt sich für $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten (mit Hilfe des Gauß-Algorithmus, siehe 4.7.6) den Eigenraum

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Matrix B

Das charakteristische Polynom der Matrix B lautet

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda).$$

Die Nullstellen dieses Polynoms (die Eigenwerte von B) sind

$\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$ mit den algebraischen Vielfachheiten $e_1 = 2$ und $e_3 = 1$.

Die Eigenräume zu diesen Eigenwerten erhält man durch Lösen des entsprechenden LGS

$$(B - \lambda_k E_3)v_k = 0, \quad \text{für } k \in \{1, 2\}.$$

Für $\lambda_1 = 1$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

als Eigenraum erhalten wir

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Analog ergibt sich für $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als Eigenraum erhalten wir

$$V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

(b) Die Matrix A ist diagonalisierbar, weil sie 3 linear unabhängige Eigenvektoren hat. (Äquivalent: die Summe der geometrischen Vielfachheiten ist gleich 3, siehe 6.3.1 und 6.3.5).
Die Matrix B ist nicht diagonalisierbar, denn die Summe der geometrischen Vielfachheiten ihrer Eigenwerte ist gleich 2 und damit kleiner als 3. Es gibt nur 2 linear unabhängige Eigenvektoren.

(c) Die Matrix S, die aus den Eigenvektoren besteht, erfüllt $D = S^{-1}XS$, wobei die entsprechende Diagonalmatrix D die Eigenwerte auf der Diagonalen in der richtigen Reihenfolge hat.

Für die Matrix A:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix B nicht diagonalisierbar ist, gibt es keine entsprechenden Matrizen S und D für B.

Aufgabe H 67. *Verallgemeinerte Fibonacci-Folge*

Für einen fest gewählten Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$f_1 = 2, \quad f_2 = t, \quad f_{n+2} = 3f_{n+1} - 2f_n \text{ für } n \geqq 1.$$

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass für alle $n \geqq 1$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$A\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^n\begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie eine Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ Diagonalform besitzt.

Bestimmen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimmen Sie mit **(a)** und **(b)** eine geschlossene Formel (ohne Rekursion) für f_n in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir finden eine Matrixbeschreibung für die Folge f_n, indem wir die Gleichung $A\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ lösen. Wir nehmen an, dass $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Dann gilt

$$A\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3f_{n+1} - 2f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Dies ist jedenfalls erfüllt für $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$ und $d = 0$. Also setzen wir $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Jetzt verifiziert man $A^1\binom{t}{2} = \binom{3t-4}{t} = \binom{f_3}{f_2}$ und schließt für $n > 1$ induktiv aus $A^{n-1}\binom{t}{2} = \binom{f_{n+1}}{f_n}$ auf $A^n\binom{t}{2} = AA^{n-1}\binom{t}{2} = A\binom{f_{n+1}}{f_n} = \binom{f_{n+2}}{f_{n+1}}$.

(b) Zuerst bestimmen wir die Eigenwerte von $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\det(A - \lambda E_2) = (3-\lambda)(-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

Die Eigenwerte sind also 1 und 2.
Wir bestimmen die Eigenräume (sie sind beide eindimensional):
$(A - E_2)x = 0$ ergibt: $\left[\begin{array}{rr||r} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$. Folglich: $V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
$(A - 2E_2)x = 0$ ergibt: $\left[\begin{array}{rr||r} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$. Folglich: $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Die Matrix T, gebildet aus den Eigenvektoren von A, ist

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Diagonalmatrix ist $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Es ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und aus $A = TDT^{-1}$ folgt $A^n = TD^nT^{-1}$. Daher ist

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Wir haben

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-2)2^{n+1} + 4 - t \\ (t-2)2^n + 4 - t \end{pmatrix}$$

und somit ist $f_{n+1} = (t-2)2^n + 4 - t$, und also

$$f_n = (t-2)2^{n-1} + 4 - t.$$

Aufgabe H 68. *Quadriken und Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die quadratische Form

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \mapsto q(x) := \frac{1}{2}x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 10x_3^2.$$

(a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $q(x) = x^\intercal Ax$. Entscheiden Sie, ob q positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

(b) Bestimmen Sie den Typ (kegelig, parabolisch, Mittelpunktsquadrik) der Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid q(x) - 7x_2 + \frac{7}{2}x_3 - \frac{7}{2} = 0\}$.

(c) Berechnen Sie eine euklidische Normalform von Q.

(d) **(i)** Geben Sie ein Koordinatensystem an, in dem Q diese euklidische Normalform hat.

(ii) Klassifizieren Sie die Quadrik in (c) weiter nach 7.3.7/7.3.8.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$q(x) = x^\intercal Ax, \qquad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 3 & 3 \\ 3 & -\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 10-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\tfrac{1}{2} - \lambda)\big(-\lambda(10-\lambda) - 36\big) - 3\big(3(10-\lambda) - 18\big) + 3\big(18 + 3\lambda\big) \\
&= -\lambda^3 + 10\lambda^2 + 36\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda^2 - 5\lambda - 18 - 90 + 9\lambda + 6\cdot 18 + 9\lambda \\
&= \lambda(-\lambda^2 + \tfrac{21}{2}\lambda + 49).
\end{aligned}$$

Mittels der Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned}
-\lambda^2 + \tfrac{21}{2}\lambda + 49 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{21}{2} \pm \sqrt{\frac{21^2}{4} + 4\cdot 7^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{21}{2} \pm 7\sqrt{\frac{3^2}{4} + 4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{21}{2} \pm \frac{7}{2}\sqrt{3^2 + 4^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{21}{2} \pm \frac{7}{2}\cdot 5\right) = \frac{1}{4}(21 \pm 35)
\end{aligned}$$

Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 14, \quad \lambda_2 = -\frac{7}{2}, \quad \lambda_3 = 0.$$

(Den Eigenwert 0 sortieren wir nach hinten, wie in der Vorlesung.)

Nach Lemma 7.1.8 ist A indefinit, da A sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt.

(b) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \frac{7}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = -\frac{7}{2}$$

schreiben, wobei $\mathrm{Rg}(A) = 2$. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} -\frac{7}{2} & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{4} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 3 & 3 \\ -\frac{7}{2} & 3 & 0 & 6 \\ \frac{7}{4} & 3 & 6 & 10 \end{array}\right)$$

haben wir

$$\mathrm{Rg}\,(A_{\text{erw}}) = \mathrm{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} & \frac{17}{4} \\ 0 & 3 & \frac{17}{4} & \frac{87}{8} \end{array}\right) = \mathrm{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -\frac{29}{2} & -\frac{55}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{55}{4} & \frac{87}{8} - 18 \end{array}\right) = 4 = \mathrm{Rg}(A){+}2.$$

Damit ist die gegebene Quadrik nach 7.2.6 eine parabolische Quadrik.

(c) *Erster Schritt: Diagonalisierung:*
Die Eigenräume zu diesen Eigenwerten erhält man durch Lösen des entsprechenden LGS $(A - \lambda_k)v = 0$, für $k \in \{1, 2, 3\}$.

Für $\lambda_1 = 14$ liefert der Gauß-Algorithmus

$$\left[\begin{array}{ccc||c} -\frac{27}{2} & 3 & 3 & 0 \\ 3 & -14 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{40}{3} & \frac{20}{3} & 0 \\ 0 & \frac{20}{3} & -\frac{10}{3} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c||c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

und damit den folgenden Eigenraum:

$$V(14) = L(f_1^*), \qquad \text{wobei} \quad f_1^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Analog ergibt sich für $\lambda_2 = -\frac{7}{2}$:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{7}{2} & 6 & 0 \\ 3 & 6 & \frac{27}{2} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{45}{4} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c||c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

und damit der folgende Eigenraum:

$$V(-\tfrac{7}{2}) = L(f_2^*), \qquad \text{wobei} \quad f_2^* = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_3 = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} \frac{1}{2} & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -18 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & -8 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c||c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

und damit der folgende Eigenraum:

$$V(0) = L(f_3^*), \qquad \text{wobei} \quad f_3^* = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen die Vektoren f_j^* normieren:

$$f_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Transformationsmatrix

$$F = (f_1\, f_2\, f_3) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

und transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$\tilde{a} = F^{\mathsf{T}} a = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = (O; f_1, f_2, f_3)$ hat die Quadrik Q die Gleichung

$$14y_1^2 - \tfrac{7}{2}y_2^2 + 7y_2 + \tfrac{7}{2}y_3 - \tfrac{7}{2} = 0.$$

Zweiter Schritt: Verschiebung.
Durch quadratische Ergänzung sehen wir, wie wir verschieben müssen, um den linearen Term in y_2 zu beseitigen:

$$14y_1^2 - \tfrac{7}{2}(y_2 - 1)^2 + \tfrac{7}{2} + \tfrac{7}{2}y_3 - \tfrac{7}{2} = 0.$$

Wir verwenden als neuen Ursprung also den Punkt ${}_{\mathbb{F}}P = (0 \quad 1 \quad 0)^{\mathsf{T}}$ und erhalten bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G} = (P; f_1, f_2, f_3)$ mit

$$P = {}_{\mathbb{E}}P = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$14z_1^2 - \frac{7}{2}z_2^2 + \frac{7}{2}z_3 = 0.$$

Die euklidische Normalform ist

$$8z_1^2 - 2z_3^2 + 2z_3 = 0,$$

die dem Typ III in 7.3.4 entspricht, somit bestätigen wir, dass die Quadrik eine parabolische Quadrik ist.

(d) **(i)** $\mathbb{G} = (P; f_1, f_2, f_3)$ ist das Koordinatensystem, in dem Q die oben angegebene euklidische Normalform hat.

(ii) Da jede der drei Variablen in der Gleichung vorkommt, müssen wir die affine Klassifikation der Quadriken im Raum (7.3.7) betrachten. Wir sehen, dass die affine Normalform die Gestalt eines *hyperbolischen Paraboloids* hat.

Aufgabe H 69. *Symmetrische Matrizen*

Sei A eine reelle, symmetrische Matrix mit Eigenwerten $1+\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$ und 1, sowie den zugehörigen Eigenräumen

$$V(1+\sqrt{5}) = \mathrm{L}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\\sqrt{5}\end{pmatrix}\right), \quad V(1-\sqrt{5}) = \mathrm{L}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\\sqrt{5}\end{pmatrix}\right), \quad V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right).$$

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $D = S^\intercal AS$.

(c) Bestimmen Sie A.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die gegebenen Eigenvektoren sind:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\\sqrt{5}\end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\\sqrt{5}\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Weil die Matrix A symmetrisch ist und diese Eigenvektoren zu jeweils verschiedenen Eigenwerten gehören, stehen sie von alleine aufeinander senkrecht (siehe 6.4.5 in der Vorlesung.)

Um eine Orthonormalbasis B zu erhalten, normieren wir diese Vektoren:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\\-1\\\sqrt{5}\end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-2\\1\\\sqrt{5}\end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

$$B\colon \quad \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\\-1\\\sqrt{5}\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-2\\1\\\sqrt{5}\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

(b) Die Spalten der orthogonalen Matrix S sind die normierten Eigenvektoren:

$$S = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Matrix A ergibt sich aus der Transformation $A = SDS^{\mathsf{T}}$.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -2 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{5} \\ -2 & 1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -2 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} & 5+\sqrt{5} \\ -2+2\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & -5+\sqrt{5} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4+4\sqrt{5}+4-4\sqrt{5}+2 & -2-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}+4 & 10+2\sqrt{5}+10-2\sqrt{5} \\ -2-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}+4 & 1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+8 & -5-\sqrt{5}-5+\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}+10 & -\sqrt{5}-5+\sqrt{5}-5 & 5\sqrt{5}+5-5\sqrt{5}+5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & -10 \\ 20 & -10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 70. *Folgen*

Gegeben sei die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(\frac{1}{n^2} - 3\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \frac{(n-1)^2\cos(n\pi)}{4n^2}, \quad c_n := |a_n|, \quad d_n := |b_n|.$$

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz. Bei Konvergenz geben sie deren Grenzwert an.

Lösungshinweise hierzu:

Es ist klar, dass $(\frac{1}{n^2} - 3)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen -3. Außerdem wird die Konvergenz der Folge $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in 2.2.2 bewiesen und zwar ist der Grenzwert dieser Folge die Eulersche Zahl e (Definition 2.2.9). Daher konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch den Grenzwertsatz (2.5.3):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} - 3\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = -3\mathrm{e}$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = 3\,\mathrm{e}$.

Die Faktor $\frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{n})^2$ konvergiert gegen $\frac{1}{4}$. Allerdings gilt

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{für } n = 2k+1 \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{für } n = 2k \text{ mit } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

D.h. die Folge $(\cos(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ häuft sich bei 1 und bei -1 und insbesondere gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \cos(n\pi) = 1 \neq -1 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \cos(n\pi)$. Daher ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.
(Es gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n = \frac{1}{4} \neq -\frac{1}{4} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$).

Andererseits hat die Folge $(|\cos(n\pi)|)_{n\in\mathbb{N}}$ nur einen Häufungspunkt, nämlich 1.
Also gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |\cos(n\pi)| = 1 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |\cos(n\pi)|$. Daher konvergiert die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n-1)^2}{4n^2}\cos(n\pi)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \lim_{n\to\infty}|\cos(n\pi)| = \frac{1}{4}.$$