Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 76. *Funktionsgrenzwerte*

Bestimmen Sie folgende Funktionsgrenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi x^5 - 4x^3 + \pi}{2x^5 - 4x^2 + 1}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(\cos(x))^2 - 2}{\frac{x-5}{2x^3-1}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{\sin(x^3)}{x^4}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Satz 1.11.8 gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x^5 - 4x^3 + \pi}{2x^5 - 4x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Es gilt für $x < 0$ wegen $\frac{2x^3-1}{x-5} > 0$ und $(\cos(x))^2 - 2 \leqq -1$:

$$\frac{(\cos(x))^2 - 2}{\frac{x-5}{2x^3-1}} = \left((\cos(x))^2 - 2\right) \cdot \frac{2x^3-1}{x-5} \leqq -\frac{2x^3-1}{x-5} \to -\infty$$

wenn $x \to -\infty$ wieder nach Satz 1.11.8. Somit folgt:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\cos(x))^2 - 2}{\frac{x-5}{2x^3-1}} = -\infty.$$

(c) Wir schreiben den Ausdruck wie folgt um:

$$\frac{\sin(x^3)}{x^4} = \frac{\sin(x^3)}{x^3} \cdot \frac{1}{x}.$$

Es gilt nun nach den Grenzwertsätzen 1.12.1 sowie Beispiel 1.12.5:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin(x^3)}{x^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

Außerdem ist $\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ und somit folgt

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin(x^3)}{x^4} = -\infty.$$

Aufgabe H 77. *Stetigkeit*

Sei $p \geqq 0$ ein reeller Parameter. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{3(2-x)} & \text{für } x < 2, \\ \sqrt{x^2 + px} - \sqrt{x^2 + 8x + 29} & \text{für } x \geqq 2. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ in Abhängigkeit von p.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f in Abhängigkeit von p.

(c) Für welche Werte des Parameters p ist f an der Stelle $x = 2$ stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+px}-\sqrt{x^2+8x+29}\right) = \frac{x^2+px-(x^2+8x+29)}{\sqrt{x^2+px}+\sqrt{x^2+8x+29}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(p-8)x+29}{x\left(\sqrt{1+\frac{p}{x}}+\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{29}{x^2}}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{p-8}{\sqrt{1+\frac{p}{x}}+\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{29}{x^2}}} + 0 \\
&= \frac{p-8}{2} = \frac{p}{2} - 4.
\end{aligned}$$

(b) Durch Polynomdivision ergibt sich für $x<2$

$$f(x) = -\frac{1}{3}\left(x^2+3x+2\right).$$

Diese Polynomfunktion hat Nullstellen

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2},$$

das heißt $x_1=-1$ und $x_2=-2$. In der Tat liegen beide Stellen in dem zulässigen Bereich $x<2$. Wir untersuchen noch, ob f weitere Nullstellen für $x \geqq 2$ hat. Es gilt dort dann

$$\sqrt{x_3^2+px_3} = \sqrt{x_3^2+8x_3+29}$$

Da die Terme unter den Wurzeln auf beiden Seiten stets positiv sind, können wir äquivalent umformen zu $px_3 = 8x_3+29$ bzw. $x_3 = \frac{29}{p-8}$, falls $p \neq 8$. Es gilt dabei, dass $x_3 \geqq 2$ ist genau dann, wenn $8 < p \leqq \frac{45}{2}$. Genau in diesen Fällen hat f folglich mit $x_3 = \frac{29}{p-8}$ noch eine dritte Nullstelle.

(c) f ist stetig in $x=2$ genau dann, wenn der linksseitige Grenzwert von f an der Stelle 2 mit dem Funktionswert $f(2)$ übereinstimmt [Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt das automatisch.]. Es gilt dabei

$$f(2) = \sqrt{4+2p} - \sqrt{4+16+29} = \sqrt{4+2p} - 7$$

und (vgl. **(b)**)

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = -\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{3}\left(x^2+3x+2\right) = -\frac{1}{3}(4+6+2) = -4.$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich $\sqrt{4+2p}=3$ bzw. $p=\frac{5}{2}$.

Aufgabe H 78. *ε-δ-Kriterium für Stetigkeit*

Verwenden Sie das ε-δ-Kriterium, um zu zeigen, dass die Wurzelfunktion $f(x)=\sqrt{x}$ an jeder Stelle $x_0 \geqq 0$ stetig ist. Geben Sie insbesondere für beliebiges $x_0 \geqq 0$ und $\varepsilon > 0$ ein δ_ε als Formel explizit an, so dass die ε-δ-Beschreibung erfüllt ist. Können Sie δ_ε unabhängig von x_0 wählen?

Lösungshinweise hierzu: Wir können $\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$ wählen. Es gilt dann für beliebige $x, x_0 \geqq 0$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| \leqq \sqrt{|x - x_0|} < \varepsilon.$$

Insbesondere kann δ_ε tatsächlich unabhängig von x_0 gewählt werden.
Um die erste Ungleichung einzusehen, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_0 \leqq x$. Die Ungleichung ist dann erfüllt genau dann, wenn

$$\sqrt{x} \leqq \sqrt{x_0} + \sqrt{x - x_0}.$$

Da beide Seiten nicht negativ sind, erhalten wir durch Quadrieren die äquivalente Ungleichung

$$x \leqq x_0 + x - x_0 + 2\sqrt{x_0(x - x_0)} = x + 2\sqrt{x_0(x - x_0)},$$

welche trivialerweise erfüllt ist.
Hinweis: Zum Vergleich mit Alternativlösungen sei (ohne Beweis) erwähnt: Für $x_0 = 0$ ist obige Wahl von δ_ε optimal. Für $x_0 > 0$ und $\varepsilon < 2\sqrt{x_0}$ ist die optimale Wahl von δ_ε dagege gegeben durch

$$\delta_{\varepsilon,x_0} = \varepsilon\left(2\sqrt{x_0} - \varepsilon\right).$$

Jedes größere δ_ε erfüllt die Anforderungen nicht.

Aufgabe H 79. *Umkehrfunktion*

Gegeben sei die Funktion $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-2x - x^2} & \text{falls } -2 \leqq x < 0, \\ \sqrt{1 - x^2} - 1 & \text{falls } 0 \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

(a) Prüfen Sie, ob f stetig ist.

(b) Finden Sie möglichst große Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die Einschränkung $f : [a, b] \to [c, d]$ bijektiv ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} rechnerisch.

(c) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine geeignete Skizze.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion genügt es zu prüfen, dass wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion genügt es zu prüfen, dass

$$\sqrt{-2 \cdot 0 - 0^2} = 0 = \sqrt{1 - 0^2} - 1.$$

Damit ist f auf $[-2, 1]$ stetig.

(b) Wir wählen $[a, b] = [-1, 1]$. In der Tat enthält jedes größere Intervall jedenfalls alle Punkte in $[-1, 0]$ sowie zumindest einen Punkt $x_0 \in [-2, -1)$. Es gilt aber $-2 - x_0 \in [-1, 0]$ und $f(-2 - x_0) = \sqrt{4 + 2x_0 - 4 - 4x_0 - x_0^2} = \sqrt{-2x_0 - x_0^2} = f(x_0)$. Damit kann f in keinem größeren Intervall als $[-1, 1]$ injektiv sein.

Andererseits ist f in $[-1, 1]$ tatsächlich injektiv: Seien $x, y \in [-1, 1]$ beliebig mit $f(x) = f(y)$. Falls $f(x) = f(y) < 0$, so folgt direkt, dass $x, y \geqq 0$ und damit $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - y^2}$. Quadrieren führt zu $x^2 = y^2$ und (da x und y nicht negativ sind) $x = y$.

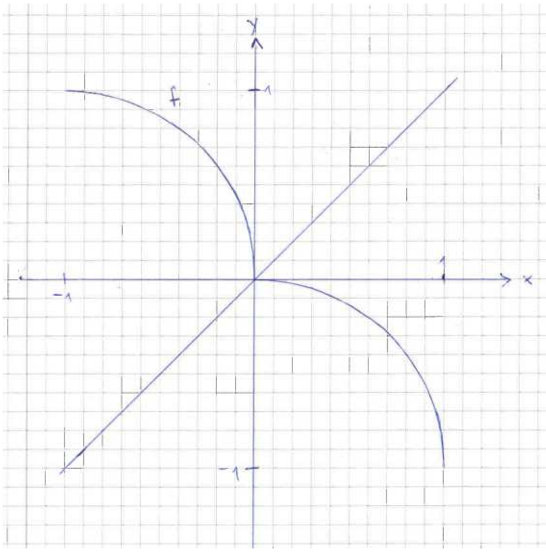

Abbildung 1: Skizze zu **H 79 (c)**

Ist dagegen $f(x) = f(y) \geqq 0$, so folgt $x, y < 0$ und wir erhalten $-2x - x^2 = -2y - y^2$. Dies lässt sich umformen zu

$$0 = x^2 - y^2 + 2(x - y) = (x - y)(x + y + 2).$$

Nach Voraussetzung ist $x + y + 2 \neq 0$ und es folgt $x = y$.

Da f also auf $[-1, 1]$ stetig und injektiv ist, genügt es, f an den Rändern auszuwerten, um den Wertebereich $[c, d]$ zu erhalten. Es gilt $f(-1) = 1$ und $f(1) = -1$, somit ist $[c, d] = [-1, 1]$.

Durch Lösen der Gleichung $y = \sqrt{-2x - x^2}$ nach x erhält man (unter Beachtung der Bedingung $x \in [-1, 0)$), dass $x = \sqrt{1 - y^2} - 1$. Analog erhält man aus $y = \sqrt{1 - x^2} - 1$ genau $x = \sqrt{-2y - y^2}$. Insgesamt ist hier also $f^{-1} = f$.

(c) Wir sehen in oben stehender Skizze, dass der Graph der Funktion f spiegelsymmetrisch an der ersten Winkelhalbierenden ist. Damit sind Funktion und Umkehrfunktion identisch.

Frischhaltebox

Aufgabe H 80. *Häufungspunkte komplexer Folgen*

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge $\left(\frac{(-1)^n}{(1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^n)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen konvergiert.

Lösungshinweise hierzu: Wir bezeichnen obige Folge mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und betrachten die Teilfolgen

$$\begin{aligned}
a_{4k} &= \frac{(-1)^{4k}}{(1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^{4k})^{4k}} = \frac{1}{(2+\mathrm{i})^{4k}},\\
a_{4k+1} &= \frac{(-1)^{4k+1}}{(1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^{4k+1})^{4k+1}} = -\frac{1}{(1+2\mathrm{i})^{4k+1}},\\
a_{4k+2} &= \frac{(-1)^{4k+2}}{(1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^{4k+2})^{4k+2}} = \frac{1}{\mathrm{i}^{4k+2}} = -1,\\
a_{4k+3} &= \frac{(-1)^{4k+3}}{(1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^{4k+3})^{4k+3}} = -\frac{1}{1^{4k+3}} = -1.
\end{aligned}$$

Für die ersten beiden Teilfolgen gilt dabei für $k \to \infty$:

$$|a_{4k}| = \left|\frac{1}{2+\mathrm{i}}\right|^{4k} = \frac{1}{5^{2k}} \to 0$$

und

$$|a_{4k+1}| = \left|\frac{1}{1+2\mathrm{i}}\right|^{4k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}^{4k+1}} \to 0.$$

Da die obigen Teilfolgen alle Folgeglieder abdecken, sind damit die Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau 0 und -1.