Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 86. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich sowie die erste Ableitung der Funktionen

(a) $f_1(x) = \ln\big(\cot(x)\big) + e^{3x}$,

(b) $f_2(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-9}}$,

(c) $f_3(x) = x^{e^x}$, und

(d) $f_4(x) = \operatorname{sech}\left((x+1)^2\right)$.

Lösungshinweise hierzu:

Kommentar: Seien $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar über den Mengen M_f bzw. M_g; dann

- $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ sind differenzierbar über $M_f \cap M_g$;
- $f(x)/g(x)$ ist differenzierbar über $M_f \cap \{x \in M_g : g(x) \neq 0\}$.
- wenn $M \subseteqq M_f$ und $f(M) \subseteqq M_g$, dann ist $g \circ f$ auf M differenzierbar.

(a) Die Funktion $x \mapsto \ln(x)$ ist definiert auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$; die Funktion $x \mapsto \cot(x)$ ist definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{N}\}$ und ist positiv für $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : n\pi < x < n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$. Beide Funktionen sind über ihre entsprechenden Domänen differenzierbar, also ist die Domäne von $x \mapsto \log(\cot(x))$ über die Menge M_1 differenzierbar. Die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ ist differenzierbar über $\mathbb{R}$. Daher ist die Funktion f_1 über $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : n\pi < x < n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$ differenzierbar. Mit Hilfe der Kettenregel berechnen wir die Ableitung:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \left(\frac{1}{\cot(x)}\right)(-\csc^2(x)) + 3\mathrm{e}^{3x} \\ &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)\left(\frac{-1}{\sin^2(x)}\right) + 3\mathrm{e}^{3x} \\ &= -\sec(x)\csc(x) + 3\mathrm{e}^{3x}. \end{aligned}$$

(b) Für die Definition von f_2 ist es notwendig, dass $\sqrt{x^2-9} \neq 0$ ist, also $x \neq 3$. Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist differenzierbar für $x > 0$, also ist $x \mapsto \sqrt{x^2-9}$ differenzierbar auf $M_2 = (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$. Daher ist f_2 differenzierbar über $M_2 = (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$, und

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{2x\sqrt{x^2-9} - \frac{1}{2}(x^2-9)^{-\frac{1}{2}}(2x)(x^2+1)}{x^2-9} \\ &= \frac{1}{x^2-9}\left(\frac{2x(x^2-9) - x^3 - x}{\sqrt{x^2-9}}\right) \\ &= \frac{x(x^2-19)}{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

(c) Nach Definition 2.2.7 ist $x^{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x \ln(x)}$, wobei x positiv sein muss. Da $x \mapsto \ln(x)$ für $x > 0$ differenzierbar ist und $x \mapsto \mathrm{e}^x$ über den reellen Zahlen differenzierbar ist, ist

$x \mapsto x^{\mathrm{e}(x)}$ differenzierbar auf $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Durch die Kettenregel und die Produktregel:

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x \ln(x)}(\mathrm{e}^x \ln(x) + \frac{\mathrm{e}^x}{x}) \\ &= \mathrm{e}^x x^{\mathrm{e}^x}\left(\ln(x) + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

(d) Da $x \mapsto \cosh(x)$ immer positiv und differenzierbar ist, und $x \mapsto (x+1)^2$ immer differenzierbar ist, ist $x \mapsto (\operatorname{sech}(x+1)^2)$ über $M_4 = \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= -\operatorname{sech}((x+1)^2)\tanh((x+1)^2)(2)(x+1) \\ &= -2(x+1)\operatorname{sech}((x+1)^2)\tanh((x+1)^2). \end{aligned}$$

Aufgabe H 87. *Mehrfaches Ableiten*

Seien $a, b, \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie jeweils eine Formel für die angegebene n-te Ableitung, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.

(a) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (\sin(ax) + \cos(ax))$,

Hinweis: Additiontheoreme für Sinus und Kosinus.

(b) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (x\mathrm{e}^x + a^{-x})$, wobei $x > 0$,

(c) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (f(x)g(x))$, wobei f und g unendlich oft differenzierbare Funktionen sind, und

(d) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \frac{1}{a-bx}$, wobei $x \neq \frac{a}{b}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit Hilfe des Hinweises schreiben wir:

$$\sin(ax) + \cos(ax) = \sqrt{2}\sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right).$$

Wir berechnen ein paar Ableitungen und verwenden die trigonometrische Identität $\cos(\vartheta) = \sin(\vartheta + \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sqrt{2}\sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right)\right) &= a\sqrt{2}\cos\left(ax + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}a\sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^2\left(\sqrt{2}\sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right)\right) &= \sqrt{2}a^2\cos\left(ax + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}a^2\sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Wir schlagen die folgende Formel vor

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (\sin(ax) + \cos(ax)) = \sqrt{2}a^n\sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Jetzt benutzen wir die Induktion. Wenn $n = 0$,

$$\sqrt{2}a^0\sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + (0)\pi\right) = \sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right).$$

Wir nehmen an, dass die vorgeschlagene Formel für einige $n \geqq 0$ gilt. Dann verwenden wir die Identität $\cos(\vartheta) = \sin(\vartheta + \frac{\pi}{2})$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^{n+1} \left(\sqrt{2}\sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^{n} \left(\sqrt{2}\sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sqrt{2}a^n \sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}a^{n+1}\cos\left(ax + \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sqrt{2}a^{n+1}\sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sqrt{2}a^{n+1}\sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

und die Induktion ist abgeschlossen.

Kommentar: Es ist möglich, direkt vorzugehen; dies führt zu 4-Fällen:

$$\begin{aligned}
&a^n(\sin(ax) + \cos(ax)),\ n = 4k, \\
&a^n(\cos(ax) - \sin(ax)),\ n = 4k+1, \\
&a^n(-\sin(ax) - \cos(ax)),\ n = 4k+2, \\
&a^n(-\cos(ax) + \sin(ax)),\ n = 4k+3.
\end{aligned}$$

(b) Wir schlagen die folgende Formel

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^{n} (x\mathrm{e}^x + a^{-x}) = n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + (-\ln(a))^n a^{-x}.$$

vor. Wenn $n = 0$,

$$n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + (-\ln(a))^n a^{-x} = x\mathrm{e}^x = (x\mathrm{e}^x + a^{-x})$$

der Beweis für den Basisfall. Nehmen wir nun an, dass dies für $n > 0$ gilt; dann

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^{n+1} (x\mathrm{e}^x + a^{-x}) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^{n} (x\mathrm{e}^x + a^{-x}) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)(n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + (-\ln(a))^n a^{-x}) \\
&= n\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + (-\ln(a))^n(-\ln(a))a^{-x} \\
&= (n+1)\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + (-\ln(a))^{n+1}a^{-x}
\end{aligned}$$

womit die Induktion abgeschlossen ist.

(c) Der Klarheit halber verwenden wir die Notation

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^{n} f(x) = f^{(n)}(x),$$

wenn dies sinnvoll ist. Nachdem wir einige Ableitungen berechnet und ein Muster erkannt haben, schlagen wir die Formel vor:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^{n} (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(n)}(x)$$

Für $n = 0$ wir haben

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \right)^{0-k} f(x) \right) \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \right)^{k} g(x) \right) = f^{(0)}(x) g^{(0)}(x) = f(x)g(x).$$

Dies zeigt, dass der Basisfall gilt. Dies zeigt, dass der Basisfall gilt. Nehmen wir nun an, die Formel gilt für $n \geqq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \right)^n (f(x)g(x)) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} (f^{n-k}(x) g^{k}(x)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{n+1-k}(x) g^{k}(x) + f^{n-k}(x) g^{k+1}(x)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n+1-k}(x) g^{k}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k}(x) g^{k+1}(x) \\
&= \binom{n}{0} f^{n+1}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{n+1-k}(x) g^{k}(x) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{n-k}(x) g^{k+1}(x) + \binom{n}{n} f(x) g^{n+1}(x) \\
&= \binom{n+1}{0} f^{n+1}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{n+1-k}(x) g^{k}(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{n+1-k}(x) g^{k}(x) + \binom{n+1}{n+1} f(x) g^{n+1}(x) \\
&= \binom{n+1}{0} f^{n+1}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{n+1-k}(x) g^{k}(x) \\
&+ \binom{n+1}{n+1} f(x) g^{n+1}(x) \\
&= \binom{n+1}{0} f^{n+1}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{n+1-k}(x) g^{k}(x) \\
&+ \binom{n+1}{n+1} f(x) g^{n+1}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{n+1-k}(x) g^{k}(x),
\end{aligned}$$

und die Induktion ist abgeschlossen.

(d) Wir schlagen die folgende Formel

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \right)^n \left(\frac{1}{a - bx} \right) = \frac{n! b^n}{(a - bx)^{n+1}}.$$

vor. Wenn $n = 0$,

$$\frac{n! b^n}{(a - bx)^{n+1}} = \frac{0! b^0}{(a - bx)^{0+1}} = \frac{1}{(a - bx)}$$

der Beweis für den Basisfall. Nehmen wir nun an, dass dies für $n > 0$ gilt; dann

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{a-bx}\right) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^{n}\left(\frac{1}{a-bx}\right)\\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)\left(\frac{n!b^n}{(a-bx)^{n+1}}\right)\\
&= n!b^n(-(n+1))(a-bx)^{-(n+2)}(-b)\\
&= (n+1)!b^{n+1}(a-bx)^{-(n+2)}\\
&= \frac{(n+1)!b^{n+1}}{(a-bx)^{n+2}}
\end{aligned}$$

womit die Induktion abgeschlossen ist.

Aufgabe H 88. *Kettenregel*

(a) Seien $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, $f(x) = e^{y(x)}$ und $g(x) = x^2 + 2x - 1$. Bestimmen Sie f', $(g \circ y)'$ und $(g \circ f)'$.

(b) Die Gleichung $x^3y^3 + xy = 4$, mit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $xy \neq 0$, definiert implizit eine differenzierbare Funktion, d. h. $y = y(x)$. Berechnen Sie mit hilfe der Kettelregel y'. (Die Antworten werden sowohl x als auch y enthalten.)

Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung auf beiden Seiten der Gleichung und lösen Sie nach y' auf.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{e}^{y(x)}y'(x)\\
(g\circ y)'(x) &= g'(y(x))y'(x)\\
&= (2(x+1)\circ y(x))y'(x)\\
&= 2(y(x)+1)y'(x)\\
(g\circ f)'(x) &= g'(f(x))f'(x)\\
&= (2(x+1)\circ f(x))f'(x)\\
&= 2(\mathrm{e}^{y(x)}+1)y'(x)\mathrm{e}^{y(x)}y'(x).
\end{aligned}$$

(b) Wir haben $\frac{d}{dx}x^3y^3 + xy = \frac{d}{dx}(4)$, oder

$$3x^2y^3 + x^3(3y^2y'(x)) + y + xy'(x) = 0.$$

Dann

$$x(3x^2y^2 + 1)y'(x) = -y(3x^2y^2 + 1).$$

Da $x^2y^2 + 1 \neq 0$ ist, können wir dividieren und erhalten $xy' = -y$. Wenn $x \neq 0$ (beachte $xy \neq 0$ impliziert $x \neq 0$), dann

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Aufgabe H 89. *Umkehrfunktionen der Hyperbel-Funktionen*
Betrachten Sie die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned}\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2},\\ \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ und}\\ \tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x &\mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Maximale Menge M so, dass die Funktion

$$\operatorname{artanh}\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \tanh^{-1}(x)$$

definiert ist.

(b) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\operatorname{artanh}(x)\big|_{x=x_0}$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.
Hinweis: Satz 2.3.1 kann hilfreich sein.

(c) Sei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Berechen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\operatorname{artanh}\circ f)(x)$, $x \neq 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die erforderliche Menge ist $M = (-1, 1)$. Wir berechnen sie in 2 Schritten. Zuerst bestimmen wir die maximale Menge M_0 so, dass $\tanh : \mathbb{R} \to M_0$ eine Surjektion ist (äquivalent zur Bestimmung von $\tanh(\mathbb{R})$). Dann müssen wir bestimmen, ob $\tanh : \mathbb{R} \to M_0$ eine Injektion von $\mathbb{R}$ nach M_0 ist; in diesem Fall ist $M = M_0$. Andernfalls müssen wir M_0 auf eine kleinere Menge M_0' beschränken, so dass $\tanh : \mathbb{R} \to M_0'$ sowohl surjektiv als auch injektiv ist, $M = M_0'$ und $\operatorname{artanh} : M \to \mathbb{R}$ definiert ist.

Um M_0 zu bestimmen, untersuchen wir, unter welchen Bedingungen für y die Gleichung $y = \tanh(x)$ für x gelöst werden kann. Um die Berechnung zu erleichtern, sei $z = \mathrm{e}^x$. Wir lösen dann $y = \frac{z-z^{-1}}{z+z^{-1}}$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{z^2-1}{z^2+1}\\ y(z^2+1) &= z^2 - 1\\ y + 1 &= z^2(1-y)\\ z^2 &= \frac{1+y}{1-y}.\end{aligned}$$

Da $z > 0$, gilt

$$x = \ln(z) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Dies ist gut definiert, sofern $\frac{1+y}{1-y} > 0$, also $y \in (-1, 1)$. Daher ist $x \mapsto \tanh(x)$ eine Surjektion von $\mathbb{R}$ nach $M_0 = (-1, 1)$.

Wir prüfen nun, ob $x \mapsto \tanh(x)$ von $\mathbb{R}$ nach M_0 injektiv ist. Nehmen wir an, $\tanh(x_1) = \tanh(x_2)$. Wie zuvor sei $z_1 = \mathrm{e}^{x_1}$ und $z_2 = \mathrm{e}^{x_2}$. Dann vereinfacht sich $\tanh(x_1) = \tanh(x_2)$ zu $2(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 0$. Da $z_1, z_2 > 0$ die einzige Lösung

$z_1 = z_2$ ist, und, da $x \mapsto \mathrm{e}^x$ injektiv ist so, das $x_1 = x_2$, folgern wir, dass $x \mapsto \tanh(x)$ injektiv ist und $M = M_0 = (-1,1)$. **Alternatives Argument für Injektivität**: Beachten Sie, dass $\operatorname{sech}^2(x) = 2/(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) > 0$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\tanh(x) = \operatorname{sech}^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, also ist $x \mapsto \tanh(x)$ streng monoton über $\mathbb{R}$. Infolgedessen ist sie injektiv (sehen Sie **Satz 1.13.11** und **2.4.8**).

Daher ist $M = (-1,1)$, $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ ist bijektiv, und $\operatorname{artanh}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \tanh^{-1}(x)$ ist definiert.

(b) Sei $y_0 = \tanh(x_0)$. Mit Hilfe des **Satz 2.3.1**,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\operatorname{artanh}(y_0) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\tanh(x_0)} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2(x_0)} = \cosh^2(x_0).$$

Jetzt vereinfachen wir:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x_0) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{x_0} + \mathrm{e}^{-x_0}}{2}\right) \\ &= \frac{(\mathrm{e}^{2x_0}+1)^2}{4\mathrm{e}^{2x_0}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+y_0}{1-y_0}+1\right)^2}{\left(4\left(\frac{1+y_0}{1-y_0}\right)\right)} \\ &= \frac{4}{(1-y_0)^2}\frac{(1-y_0)}{4(1+y_0)} \\ &= \frac{1}{1-y_0^2}.\end{aligned}$$

Daher

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\operatorname{artanh}(x)\bigg|_{x=x_0} = \frac{1}{1-x_0^2},\ x_0 \in (-1,1).$$

(c) Erstens: $-1 < f(x) < 1$ für $x \neq 0$, so dass $(\operatorname{artanh}\circ f)(x)$ nur definiert ist, wenn $x \neq 0$. Wir Berechnen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach der Kettenregel ist

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\operatorname{artanh}\circ f)(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\operatorname{artanh}(f(x)))f'(x) \\ &= \left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}\right)\left(\frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)\left(\frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

die erforderliche Ableitung.

Frischhaltebox

Aufgabe H 90. *Faktorisierung von Polynomen*

Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^3 + 3z^2 + z - 5$ in Linearfaktoren (über $\mathbb{C}$).
Hinweis: $p(z)$ hat eine ganzzahlige Nullstelle.

Lösungshinweise hierzu: Da $p(1) = 0$, $(z-1)$ ist ein Faktor. Durch lange Division erhalten wir $p(z) = (z-1)(z^2+4z+5)$. Wenn wir nun $z^2+4z+5 = 0$ mit der quadratischen Formel lösen, erhalten wir $z_1 = -2+i$ und $z_2 = -2-i$, also $p(z) = (z-1)(z-(-2+i))(z-(-2-i)) = (z-1)(z+(2-i))(z+(2+i))$.