Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 91. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Ist die Regel von l'Hospital hilfreich?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$, $a > 0$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{\tan(x)-x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0-0} |\sin(x)|^{1-\cos(x)}$,

(d) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)}{2h^3}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} a^x - 1 = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ also könner wir die Regel von L'Hospital anwenden. Es folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} a^x \ln(a) = \ln(a).$$

(b) Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} x - \sin(x) = \lim\limits_{x\to 0} \tan(x) - x = 0$ also könner wir die Regel von L'Hospital anwenden. Wir wenden die Regel von L'Hospital an und nutzen trigonometrische Identitäten, um den Grenzwert wie folgt zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{\tan(x)-x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sec^2(x)-1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)(1-\cos(x))}{1-\cos^2(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)(1-\cos(x))}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)}{1+\cos(x)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(c) Da $\sin(x) < 0$ mit $x \to 0-0$, $|\sin(x)| = -\sin(x)$. Nun ist $\lim\limits_{x\to 0-0} -\sin(x) = \lim\limits_{x\to 0-0}(1-\cos(x)) = 0$, was eine unbestimmte Form ist, aber $\lim\limits_{x\to 0-0}(-\sin(x))^{1-cos(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0-0}(1-\cos(x))\ln(-\sin(x))}$. Wir fahren fort, den inneren Grenzwert zu berechnen. Da $\lim\limits_{x\to 0-0} \ln(-\sin(x)) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to 0-0}(1-\cos(x)) = 0$, können wir die Regel von L'Hopital auf $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{\ln(-\sin(x))}{(1-\cos(x))^{-1}}$ anwenden, gefolgt von trigonometrischen Manipulationen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-0} \frac{\ln(-\sin(x))}{(1-\cos(x))^{-1}} &= \lim_{x\to 0-0} \frac{\frac{-\cos(x)}{-\sin(x)}}{(-1)(1-\cos(x))^{-2}\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0-0} \frac{\cos(x)(1-\cos(x))^2}{-\sin^2(x)} \\
&= \lim_{x\to 0-0} \frac{\cos(x)(1-\cos(x))^2}{\cos^2(x)-1} \\
&= \lim_{x\to 0-0} \frac{\cos(x)(1-\cos(x))^2}{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)} \\
&= \lim_{x\to 0-0} \frac{\cos(x)(1-\cos(x))}{(\cos(x)+1)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Deshalb $\lim\limits_{x\to 0-0} |\sin(x)|^{1-\cos(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0-0}(1-\cos(x))\ln(-\sin(x))} = \mathrm{e}^0 = 1$ ist.

(d) Es gilt $\lim\limits_{h\to 0} f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h) = \lim\limits_{h\to 0} 2h^3 = 0$ also könner wir die Regel von L'Hospital anwenden. Tatsächlich werden wir sie 3-mal anwenden, wobei wir bei jedem Schritt überprüfen, ob die Bedingungen für die Regel erfüllt sind. Wir haben

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{2f'(x+2h) - 2f'(x+h) - 2f(x-h) + 2f'(x-2h)}{6h^2} \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{4f''(x+2h) - 2f''(x+h) + 2f''(x-h) - 4f''(x-2h)}{12h} \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{8f'''(x+2h) - 2f'''(x+h) - 2f'''(x-h) + 8f'''(x-2h)}{12} \\
=&f'''(x),
\end{aligned}$$

also ist das Limit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)}{2h^3} = f'''(x)$.

Aufgabe H 92. *Mittelwertsatz*

Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{aligned}
&f\colon (1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2x + \sqrt{x-1}, \\
&g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie für f eine Zwischenstelle $\xi \in (5,10)$ so, dass $f'(\xi) = \frac{f(10)-f(5)}{10-5}$ ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Konstanten $c(n)$ und $C(n)$ so, dass die folgende Grenze gilt:

$$c(n) < g(n+1) - g(n) < C(n).$$

(c) Ein Autofahrer fährt durch eine Kleinstadt mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 50km/h. Die Stadt ist 5km groß. Am Ortseingang zeigt der Tachometer 46km/h an und die Uhr zeigt $10:00$ Uhr, am Ortsausgang zeigt der Tachometer 40km/h an und die Uhr zeigt $10:06$ Uhr. Einige Wochen später erhält der Fahrer einen Strafzettel per Post. Erklären Sie das.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen die Ableitung: $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$. Wir müssen die folgende Gleichung lösen

$$f'(\xi) = \frac{f(10) - f(5)}{10 - 5} = \frac{2(10) + \sqrt{9} - [2(5) + \sqrt{4}]}{4} = \frac{11}{5},$$

oder

$$2 + \frac{1}{2\sqrt{\xi - 1}} = \frac{11}{5}.$$

Daher $\xi = \frac{29}{4}$ ist. Beachten Sie $5 < \xi < 10$.

(b) Wie haben $g'(x) = 1/3x^{\frac{2}{3}}$. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf $g(x)$ im Intervall $[n, n+1]$,

$$\frac{g(n+1) - g(n)}{n + 1 - n} = g'(\xi).$$

für einige $\imath \in (n, n+1)$. Nun berechnen wir Schranken für die Ableitung, d.h. $c(n) = \min\{g'(x) : x \in [n, n+1]\} \leqq g'(\xi) \leqq \max\{g'(x) : x \in [n, n+1]\}$. Da $g'(x)$ monoton abnehmend ist, $g'(n+1) \leqq g'(\xi) \leqq g'(n)$, also

$$c(n) = g'(n+1) = \frac{1}{3(n+1)^{\frac{2}{3}}},$$

und

$$C(n) = g'(n) = \frac{1}{3(n)^{\frac{2}{3}}}.$$

(c) Sei $x(t)$(in km) die Position des Autos zur Zeit t (in min), mit $x(0) = 0$, dem Eingang der Stadt, und $x(6) = 5$, dem Ende der Stadt. Die Ableitung von x ist die Geschwindigkeit, und nach dem Mittelwertsatz gibt es einige $\tau \in (0, 5)$, so dass $x'(\tau) = \frac{x(6)-x(0)}{6-0} = \frac{5}{6}$km/h; aber $\frac{5}{6}$km/hr$=50$km/h, die Höchstgeschwindigkeit. Der Fahrer erhielt einen Strafzettel wegen Überschreitung der Geschwindigkeitsbegrenzung.

Aufgabe H 93. *Taylorpolynome*

Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{aligned} f&\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x},\\ g&\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \arctan(x),\\ h&\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (f(x) - 1)(g(x) - x). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $T_4(f,x,0), T_4(g,x,0), R_4(f,x,0)$ und $R_4(g,x,0)$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (a), $T_4(h,x,0)$, und $R_4(h,x,0)$. Geben Sie $R_4(h,x,0)$ in Abhängigheit von den Ableitungen $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (g(x)-x)$ an (ohne weiter zu vereinfachen).

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir haben

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x},\ n \in \mathbb{N}$$

und

$$\begin{aligned}
g^{(1)}(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\
g^{(2)}(x) &= -\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\
g^{(3)}(x) &= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^2} \\
g^{(4)}(x) &= \frac{24x(x^2-1)}{(x^2+1)^4} \\
g^{(5)}(x) &= \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(x^2+1)^5}.
\end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom vom 4-Grad und der entsprechende Rest für die Funktion f sind:

$$\begin{aligned}
T_4(f,x,0) &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}, \\
R_4(f,x,0) &= -\frac{\mathrm{e}^{\vartheta_{x,0}x}}{120} x^5,\ 0 < \vartheta_{x,0} < 1.
\end{aligned}$$

Für die Funktion g werten wir zunächst die Ableitungen bei $x=0$ aus:

$$\begin{aligned}
g^{(0)}(0) &= 0 \\
g^{(1)}(0) &= 1 \\
g^{(2)}(0) &= 0 \\
g^{(3)}(0) &= -2 \\
g^{(4)}(0) &= 0 \\
g^{(5)}(0) &= 24;
\end{aligned}$$

dann

$$\begin{aligned}
T_4(g,x,0) &= \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 \\
&= x - \frac{x^3}{3}, \\
R_4(g,x,0) &= \frac{5(\vartheta_{x,0}x)^4 - 10(\vartheta_{x,0}x)^2 + 1}{5((\vartheta_{x,0}x)^2+1)^5} x^5,\ 0 < \vartheta_{x,0} < 1.
\end{aligned}$$

(b) Wir haben

$$\begin{aligned}
(f(x)-1)(g(x)-x) &= (T_4(f,x,0)+R_4(f,x,0)-1)(T_4(g,x,0)+R_4(g,x,0)-1)\\
&= (1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+R_4(f,x,0)-1)(x-\frac{x^3}{3}-R_4(g,x,0)-x)\\
&= (-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+R_4(f,x,0))(-\frac{x^3}{3}-R_4(g,x,0))\\
&= \frac{x^4}{3}+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+R_4(f,x,0))\left(-\frac{x^3}{3}\right)\\
&\quad -(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+R_4(f,x,0))R_4(g,x,0)\\
&= \frac{x^4}{3}+\Big[(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+R_4(f,x,0))\left(-\frac{x^3}{3}\right)\\
&\quad -(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+R_4(f,x,0))R_4(g,x,0)\Big],
\end{aligned}$$

und der Term in Klammern entspricht Polynomen vom Grad 5 oder höher, also

$$T_4(h,x,0)=\frac{x^4}{3}.$$

Um das Restglied zu berechnen, rufen wir die Formel der **Aufgabe H 89 (d)** auf:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (fg)(x)=\sum_{k=0}^{5}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x);$$

Let $f_1(x)=f(x)-1,\ g_1(x)=g(x)-x$; then

$$\begin{aligned}
&f_1^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{-x},\ n\geqq 1,\\
&g_1^{(1)}(x)=g^{(1)}(x)-1,\\
&g_1^{(n)}(x)=g^{(n)}(x),\ n\geqq 2,
\end{aligned}$$

und $f^{(n)}(x),\ g^{(n)}(x)$ Wir ersetzen jetzt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^5 (f_1g_1)(x) &= \sum_{k=0}^{5}\binom{n}{k}f_1^{(k)}(x)g_1^{(n-k)}(x)\\
&= \sum_{k=1}^{5}\binom{n}{k}f_1^{(k)}(x)g_1^{(n-k)}(x)+\binom{n}{0}(\mathrm{e}^{-x}-1)g_1^{(n)}(x)\\
&= \sum_{k=1}^{5}\binom{n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{-x}g_1^{(n-k)}(x)+\binom{n}{0}(\mathrm{e}^{-x})g_1^{(n)}(x)-g_1^{(n)}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{5}\binom{n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{-x}g_1^{(n-k)}(x)-g_1^{(n)}(x)\\
&= \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{5}\binom{n}{k}(-1)^k g_1^{(n-k)}(x)-g_1^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

Daher ist das Restglied gegeben durch

$$R_4(h,x,0) = \frac{1}{120}\left(\mathrm{e}^{-\vartheta_{0,x}x}\sum_{k=0}^{5}\binom{n}{k}(-1)^n g_1^{(n-k)}(\vartheta_{0,x}x) - g_1^{(n)}(\vartheta_{0,x}x).\right)x^5,$$

wobei $g_1^{(n)}$ oben angegeben ist.

(c) **Option 1:** Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) - 1 = \lim\limits_{x\to 0} g(x) - x = 0$, so, dass $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Option 2: Verwendung der Taylor-Erweiterung

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}(\frac{x^4}{3} + R_n(h,x,0)) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{3} + \lim_{x\to 0} R_n(h,x,0) = 0.$$

Wir können die zweite Grenze wie folgt begründen: da $f(x)$ und $g(x)$ unendlich differenzierbar sind, gilt dies auch für $h(x)$. Insbesondere, wenn wir $\delta > 0$ festlegen, ist $h^{(5)}(x)$ auf dem Intervall $[-\delta,\delta]$ stetig, also begrenzt, d.h. $|h^{(5)}(x)| < M$, $-\delta \leqq x \leqq \delta$. Da $|R_n(h,x,0)| = \frac{|h^{(5)}(\vartheta_{0,x}x)|}{5!}x^5 \leqq \frac{M}{5!}x^5$, für alle $x \in [-\delta,\delta]$, ist

$$\lim_{x\to 0}|R_n(h,x,0)| \leqq \lim_{x\to 0}\frac{M}{5!}x^5 = 0.$$

Aufgabe H 94. *Taylorpolynome*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sinh(2(x-1))\ .$$

(a) Bestimmen Sie $T_5(f,x,0)$ und $R_5(f,x,0)$.

(b) Bestimmen Sie $T_4(g,x,1)$ und $R_4(g,x,1)$.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie n so, dass

$$|f(x) - T_n(f,x,0)| < \varepsilon$$

gilt für alle $x \in [0,1]$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir haben

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= -\ln(x+1),\\
f^{(1)}(x) &= -(x+1)^{-1},\\
f^{(2)}(x) &= (x+1)^{-2},\\
f^{(3)}(x) &= -2(x+1)^{-3},\\
f^{(4)}(x) &= (2)(3)(x+1)^{-4},\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n(n-1)!(x+1)^{-n}\ n > 0,
\end{aligned}$$

so, dass

$$\begin{aligned}
T_5(f,x,0) &= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 \\
&= 0 + \frac{-1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{-(2!)}{3!}x^3 + \frac{3!}{4!}x^4 + \frac{-(4!)}{5!}x^5 \\
&= -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5},
\end{aligned}$$

und

$$R_5(f,x,0) = (-1)^6 \frac{5!}{6!}(\vartheta_{0,x}x)^6 x^6 = \frac{(\vartheta_{0,x}x)^6}{6}x^6.$$

(b) Wir haben

$$\begin{aligned}
g^{(0)}(x) &= \sinh(2(x-1)), \\
g^{(1)}(x) &= 2\cosh(2(x-1)), \\
g^{(2)}(x) &= 4\sin(2(x-1)), \\
g^{(3)}(x) &= 8\cosh(2(x-1)), \\
g^{(4)}(x) &= 16\sinh(2(x-1)), \\
g^{(5)}(x) &= 32\cosh(2(x-1)),
\end{aligned}$$

so, dass

$$\begin{aligned}
T_4(g,x,1) &= g(1) + \frac{g^{(1)}(1)}{1!}(x-1) + \frac{g^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{g^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{g^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 \\
&= 2(x-1) + \frac{8}{3!}(x-1)^3 \\
&= 2(x-1) + \frac{4}{3}(x-1)^3
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
R_5(g,x,0) &= \frac{32}{5!}\cosh(2(\vartheta_{1,x}x-1))(x-1)^5 \\
&= \frac{4}{15}\cosh(2(\vartheta_{1,x}x-1))(x-1)^5
\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen das Restglied $R_n(f,x,0)$:

$$R_n(f,x,0) = \frac{f^{n+1}(\vartheta_{0,x}x)}{(n+1)!}x^{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{n!}{(\vartheta_{0,x}x+1)^{n+1}(n+1)!}x^{n+1}.$$

Sei $\xi = \vartheta_{0,x}x \in (0,1)$. Da $|f(x) - T_n(f,x,0)| = |R_n(f,x,0)|$, müssen wir n so finden, dass $|R_n(f,x,0)| < \varepsilon$. Für $x \in [0,1]$ ist nun $x^{n+1} \leqq 1$ und $1 < |x+1|^{n+1}$, also

$$|R_n(f,x,0)| = \frac{|(-1)^n||n!|}{|\xi+1|^{n+1}|(n+1)!|}|x|^{n+1} \leqq \frac{1}{n+1}.$$

Wenn $1/(n+1) < \varepsilon$, folgt $R_n(f,x,0) < \varepsilon$; also $n \geqq \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 95. *Konvergenz mit Cauchy*
Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass die folgende Folge konvergiert:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+k^2)2^k}.$$

Lösungshinweise hierzu:
Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein festes n_ε gibt, so dass wenn $m, n \geqq n_\varepsilon$, $|a_m - a_n| < n_\varepsilon$. Wir können $\varepsilon < 1$ und $m < n$ annehmen. Zunächst führen wir eine Berechnung durch. Wir nehmen $\varepsilon < 1$ an. Beachten Sie $\frac{1}{1+k^2} < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{1+k^2} \frac{1}{2^k} \right| \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{1+k^2} \frac{1}{2^k} \\
&\leqq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} \\
&\leqq \frac{1}{2^m}.
\end{aligned}$$

Man beachte $\frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{n_\varepsilon}}$, wenn $n_\varepsilon < m$, und die vorherige Berechnung zeigt

$$|a_n - a_m| \leqq \frac{1}{2^m} \leqq \frac{1}{2^{n_\varepsilon}}.$$

Wenn wir $|a_n - a_m| < \varepsilon$ wollen, wählen wir n_ε so, dass $\frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$. Wir können $n \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$n_\varepsilon > -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}.$$

Wir schließen, dass die Folge eine Cauchy-Folge ist.