Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 96. *Integration*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int x \sin\left(\int_0^1 x \cdot 2\zeta \,\mathrm{d}\,\zeta\right) \mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\exp\left(\sqrt[3]{x}\right)}}{6}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen zunächst das innere Integral wie folgt: Wir wählen x beliebig und betrachten dieses als Parameter. Dann gilt:

$$\int_0^1 x \cdot 2\zeta \,\mathrm{d}\,\zeta = x \int_0^1 2\zeta \,\mathrm{d}\,\zeta = x\left[\zeta^2\right]_0^1 = x$$

Dies gilt für alle x, womit wir mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int x \sin\left(\int_0^1 x \cdot 2\zeta \,\mathrm{d}\,\zeta\right) \mathrm{d}\,x &= \int x \sin(x)\,\mathrm{d}\,x = [x\cos(x)] - \int \cos(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= [x\cos(x) - \sin(x)]\end{aligned}$$

erhalten.

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{\exp\left(\sqrt[3]{x}\right)}}{6}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{6}\int \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}\,x \\ &\text{Substitution: } x(\xi) := \xi^3 \\ &= \frac{1}{6}\int \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x(\xi))^{\frac{1}{3}}} x'(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi}\xi^2\,\mathrm{d}\,\xi \\ &\text{mehrmalige partielle Integration} \\ &= \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi}\xi^2\right] - 2\int \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi}\xi\,\mathrm{d}\,\xi = \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi}\xi^2 - 4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi}\xi\right] - \int (-4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi}\,\mathrm{d}\,\xi \\ &= \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi}\xi^2 - 4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi}\xi + 8\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi}\right] \\ &= \left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}}x - 4\sqrt[3]{x}\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}} + 8\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}}\right]\end{aligned}$$

Aufgabe H 97. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$.

(a) Bestimmen Sie f' und f''.

(b) Bestimmen Sie sämtliche Extrema sowie Wendepunkte von f.

(c) Bestimmen Sie den links- und den rechtsseitigen Grenzwert von f an der Stelle $x_0 = -1$, sofern diese existieren. Ist f dort stetig fortsetzbar?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gelten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}} \\ f''(x) &= \frac{1}{(1+x)^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}} + \frac{2}{(1+x)^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}} \end{aligned}$$

(b) Wir berechnen die Nullstellen der Ableitungen:

$$f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow -\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}} = 0 \lightning$$

Dies hat keine Lösung.
Da der Definitionsbereich offen ist (und somit keine Randpunkte zu berücksichtigen sind), existieren keine lokalen Extrema. Für die Wendepunkte folgt aus $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{(1+x)^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}} + \frac{2}{(1+x)^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}} \\ &= \left(2 + \frac{1}{(1+x)}\right)\frac{1}{(1+x)^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}} \end{aligned}$$

dass nur an $x_0 = -\frac{3}{2}$ ein Wendepunkt vorliegen kann. Für $x < -\frac{3}{2}$ gilt $0 < -\frac{1}{x+1} < 2$ und somit

$$\left(2 + \frac{1}{(1+x)}\right) > 0$$

Für $-1 > x > -\frac{3}{2}$ hingegen gilt $-\frac{1}{x+1} > 2$ und somit

$$\left(2 + \frac{1}{(1+x)}\right) < 0$$

Da ferner

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^3} &< 0 \qquad \text{für } x < -1 \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}} &> 0 \qquad \text{für } x \neq -1 \end{aligned}$$

gelten, folgt

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & x < -\frac{3}{2} \\ = 0 & x = -\frac{3}{2} \\ > 0 & -\frac{3}{2} < x < -1 \end{cases}$$

Somit liegt in $\left(-\dfrac{3}{2}, \mathrm{e}^{-2}\right)$ ein Wendepunkt von f vor. (Die Ableitung nimmt ein lokales Minimum an.)

(c) Es gelten:

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{1}{x+1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1+0} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

und somit

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = +\infty$$

Der linksseite Grenzwert von f in $x_0 = -1$ existiert, der rechtsseitige hingegen nicht. Insbesondere ist f nicht stetig fortsetzbar in $x_0 = -1$.

Aufgabe H 98. *Integration durch Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.
Wenn Sie substituieren, verwenden Sie hierzu ausschließlich 3.3.3.

(a) $$\int_1^{\exp\left(\sqrt{\ln(85)}\right)} \ln(x)x^{\ln(x)-1}\,\mathrm{d}\,x$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

Hinweis: Nutzen Sie $\frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ und $\dfrac{2}{1-t^2} = \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{1-t}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt wegen $\ln(\exp(r)) = r$ für alle $r \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^{\exp\left(\sqrt{\ln(85)}\right)} \ln(x)x^{\ln(x)-1}\,\mathrm{d}\,x = \int_1^{\exp\left(\sqrt{\ln(85)}\right)} \frac{\ln(x)}{x}\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int_1^{\exp\left(\sqrt{\ln(85)}\right)} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{e}^{(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$$

Substitution: $u(x) = \ln(x) \to u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$= \int_1^{\exp\left(\sqrt{\ln(85)}\right)} u(x)\mathrm{e}^{(u(x))^2}\cdot u'(x)\,\mathrm{d}\,x \overset{3.3.3}{=} \int_0^{\sqrt{\ln(85)}} u\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}\,u$$

Substitution: $\zeta(u) = u^2 \to \zeta'(u) = 2u$

$$= \int_1^{\exp\left(\sqrt{\ln(85)}\right)} \frac{1}{2}\zeta'(u)\mathrm{e}^{\zeta(u)}\,\mathrm{d}\,u \overset{3.3.3}{=} \int_0^{\ln(85)} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\zeta}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\zeta}\right]_0^{\ln(85)} = \frac{85}{2} - \frac{1}{2} = 42$$

(b) Wir nutzen den Hinweis:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{2}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\cos(\arcsin(t))} \cdot \arcsin'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\cos(\arcsin(t))} \cdot \arcsin'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&\overset{2.3.2}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\cos(\arcsin(t))} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}\,t = (*)
\end{aligned}$$

Es gilt: $\arcsin([-1,1]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Da auf letzterem Intervall $\cos(x)$ und $|\cos(x)|$ übereinstimmen, folgt:

$$\cos(\arcsin(t)) = |\cos(\arcsin(t))| = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin(t)))^2} = \sqrt{1-t^2}$$

Wir erhalten (erneut mit dem Hinweis):

$$\begin{aligned}
(*) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}\,t &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[\ln(|1+t|) + \ln(|1-t|)\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\cdot 2\right) = \ln(3)
\end{aligned}$$

Aufgabe H 99.

Gegeben sei die vom ganzzahligen Parameter $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ abhängige Funktion

$$f_\alpha \colon D_\alpha \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \ln\left((x+2)\cdot \mathrm{e}^{x^\alpha}\right),$$

wobei D_α den maximal möglichen Definitionsbereich bezeichne.

(a) Bestimmen Sie eine Funktion $F_\alpha \colon D_\alpha \to \mathbb{R}$ so, dass $F'_\alpha(x) = f_\alpha(x)$ gilt.

(b) Sei nun $\alpha = -2$. Bestimmen Sie D_{-2} sowie diejenige Funktion $\hat{F}\colon D_{-2} \to \mathbb{R}$, für welche $\hat{F}' = f_{-2}$ sowie $\hat{F}(-1) = 6$ und $\hat{F}(\mathrm{e}-2) = \dfrac{\mathrm{e}-3}{\mathrm{e}-2}$ gilt.

Hinweis: Ist D_{-2} ein Intervall?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\int \ln\left((x+2)\cdot \mathrm{e}^{x^\alpha}\right) \mathrm{d}\,x &= \int \ln\left((x+2)\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{x^\alpha}\right) \mathrm{d}\,x\\ &= \int \ln\left((x+2)\right) + x^\alpha \,\mathrm{d}\,x = \int \ln\left((x+2)\right) \mathrm{d}\,x + \int x^\alpha \,\mathrm{d}\,x\\ &\text{partielle. Integration}\\ &= \left[(x+2)\ln\left((x+2)\right)\right] - \int 1 \,\mathrm{d}\,x + \int x^\alpha \,\mathrm{d}\,x\\ &= \begin{cases} \left[(x+2)\ln(x+2) - x + \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right] & \alpha \neq -1\\ \left[(x+2)\ln(x+2) - x + \ln(|x|)\right] & \alpha = -1\end{cases}\end{aligned}$$

(b) Für $\alpha = -2$ ist x^α an der Stelle 0 nicht definiert. Für $x \neq 0$ gilt $(x+2)\mathrm{e}^{x^\alpha} > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Wir erhalten

$$D_{-2} = (-2,0) \cup (0,\infty)$$

Da dies kein Intervall ist, haben wir die Konstanten betreffend mehr Wahlfreiheit (vgl. 3.1.3), allerdings ist nach (a) die gesuchte Funktion auf jedem der Teilintervalle $I_1 = (-2,0)$, $I_2 = (0,\infty)$ von der Bauart

$$\hat{F}(x) = (x+2)\ln(x+2) - x - x^{-1} + c(I)$$

mit einer (möglicherweise) vom Intervall $I \in \{I_1, I_2\}$ abhängigen konstanten $c(I) \in \mathbb{R}$. Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} 6 &\overset{!}{=} \hat{F}(-1) = (-1+2)\ln(-1+2) - (-1) - (-1)^{-1} + c(I_1) = 2 + c(I_1)\\ &\Rightarrow c(I_1) = 4\\ \frac{\mathrm{e}-3}{\mathrm{e}-2} &\overset{!}{=} \hat{F}(\mathrm{e}-2) = (\mathrm{e}-2+2)\ln(\mathrm{e}-2+2) - (\mathrm{e}-2) - (\mathrm{e}-2)^{-1} + c(I_2)\\ &= \mathrm{e} - \mathrm{e} + 2 - \frac{1}{\mathrm{e}-2} + c(I_2) = \frac{2\mathrm{e}-5}{\mathrm{e}-2} + c(I_2)\\ &\Rightarrow c(I_2) = \frac{\mathrm{e}-3}{\mathrm{e}-2} - \frac{2\mathrm{e}-5}{\mathrm{e}-2} = -1\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} (x+2)\ln(x+2) - x - x^{-1} + 4 & ,\ -2 < x < 0\\ (x+2)\ln(x+2) - x - x^{-1} - 1 & ,\ 0 < x\end{cases}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 100.

Für $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ und $v_0 := \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ gilt $A^n v_0 = \begin{pmatrix}0\\1\\2-2n\end{pmatrix}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$.

Weisen Sie dies induktiv nach.

Lösungshinweise hierzu:

IA Für $n = 0$ gilt $A^n = \mathrm{E}_3$ (vgl. P47, HM1) und somit:

$$A^0 v_0 = v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

IH Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$A^n v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 - 2n \end{pmatrix}$$

IS $n \to n + 1$ Es gilt:

$$\begin{aligned} A^{n+1} v_0 &= A \cdot (A^n v_0) \\ &\overset{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 - 2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 + 2 - 2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 - 2(n+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt

$$A^n v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 - 2n \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.