Vortragsübung 13

Aufgabe V37

a) $\frac{\partial}{\partial x} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f_x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= -\sin(y \cdot e^{x^2}) \cdot ye^{x^2} \cdot 2x$

$= -2xy \sin(ye^{x^2}) \cdot e^{x^2}$

$\frac{\partial}{\partial y} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\sin(ye^{x^2}) \cdot e^{x^2}$

$f_{xx}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2y \sin(ye^{x^2}) \cdot e^{x^2}$

$- 2xy \cos(ye^{x^2}) \cdot e^{x^2} 2x \cdot e^{x^2}$

$- 2xy \sin(ye^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x$

$= -2y \sin(ye^{x^2}) e^{x^2}$

$- 4x^2y^2 \cos(ye^{x^2}) \cdot e^{2x^2}$

$- 4x^2y \sin(ye^{x^2}) \cdot e^{x^2}$

$f_{xy}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2x \cdot \sin(ye^{x^2}) \cdot e^{x^2}$

$- 2xy \cdot \cos(ye^{x^2}) \cdot e^{2x^2}$

$f_{yx}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\cos(ye^{x^2}) \cdot y e^{x^2} \cdot 2x \cdot e^{x^2}$

$- \sin(ye^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x = f_{xy}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Vergleich: Satz von Schwarz

$f_{yy}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\cos(ye^{x^2}) \cdot e^{2x^2}$

b) $\operatorname{grad} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\ f_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{pmatrix}$

$$Hf\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & f_{xy}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\ f_{yx}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & f_{yy}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

Erstmal einsehen von $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2e}\end{pmatrix}$

Bestandteile

$$e^{x_0^2} = e$$

$$y_0 e^{x_0^2} = \frac{\pi}{2e} \cdot e = \frac{\pi}{2}, \quad \text{also}$$

$$\sin(y_0 e^{x_0^2}) = 1, \ \cos(y_0 e^{x_0^2}) = 0 = f\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

$$f_x\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = -2\cdot(-1)\cdot\frac{\pi}{2e}\cdot 1\cdot e = \pi$$

$$f_y\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = -1\cdot e = -e$$

Also $\operatorname{grad} f\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi\\-e\end{pmatrix}$

$$f_{xx}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = -2\,\frac{\pi}{2e}\cdot 1\cdot e + 0 - 4\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2e}\cdot 1\cdot e$$
$$= -3\pi$$

$$f_{xy}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = -2\cdot(-1)\cdot 1\cdot e = 2e = f_{yx}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

$$f_{yy}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = 0$$

Also: $Hf\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\pi & 2e\\ 2e & 0\end{pmatrix}$

c) $T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)$

$$= f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \partial_{\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}} f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\, \partial^2_{\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}} f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Bem}}{\underset{4.4.14}{=}} 0 + \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(x-x_0,\ y-y_0\right) \cdot H_f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 + \begin{pmatrix} x+1 \\ y-\frac{\pi}{2e} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ -e \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(x+1,\ y-\frac{\pi}{2e}\right) \cdot \begin{pmatrix} -3\pi & 2e \\ 2e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-\frac{\pi}{2e} \end{pmatrix}$$

$$= \pi \cdot (x+1) - e\left(y - \frac{\pi}{2}e\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \left((x+1)\cdot(-3\pi) + \left(y-\frac{\pi}{2e}\right)\cdot 2e\right) \cdot (x+1)$$

$$\frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot 2e \cdot \left(y - \frac{\pi}{2e}\right)$$

$$= \pi \cdot (x+1) - e\left(y - \frac{\pi}{2} e\right)$$

$$- \frac{3}{2}\pi (x+1)^2 + \left(y - \frac{\pi}{2e}\right) e \cdot (x+1)$$

$$+ (x+1) \cdot e \cdot \left(y - \frac{\pi}{2e}\right)$$

$$= \pi \cdot (x+1) - e\left(y - \frac{\pi}{2} e\right) \quad \leftarrow \text{Stufe 1}$$

$$- \frac{3}{2}\pi (x+1)^2 + 2e(x+1)\left(y - \frac{\pi}{2e}\right) \quad \leftarrow \text{Stufe 2}$$

d) Tangentialebene:

$$z = T_1\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)$$

$$z = \pi(x+1) - e\left(y - \frac{\pi}{2} e\right)$$

Vergleich zu Schmiegquadrik

e) N_1:

$$1 = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cos\left(y e^{x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y e^{x^2} = 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

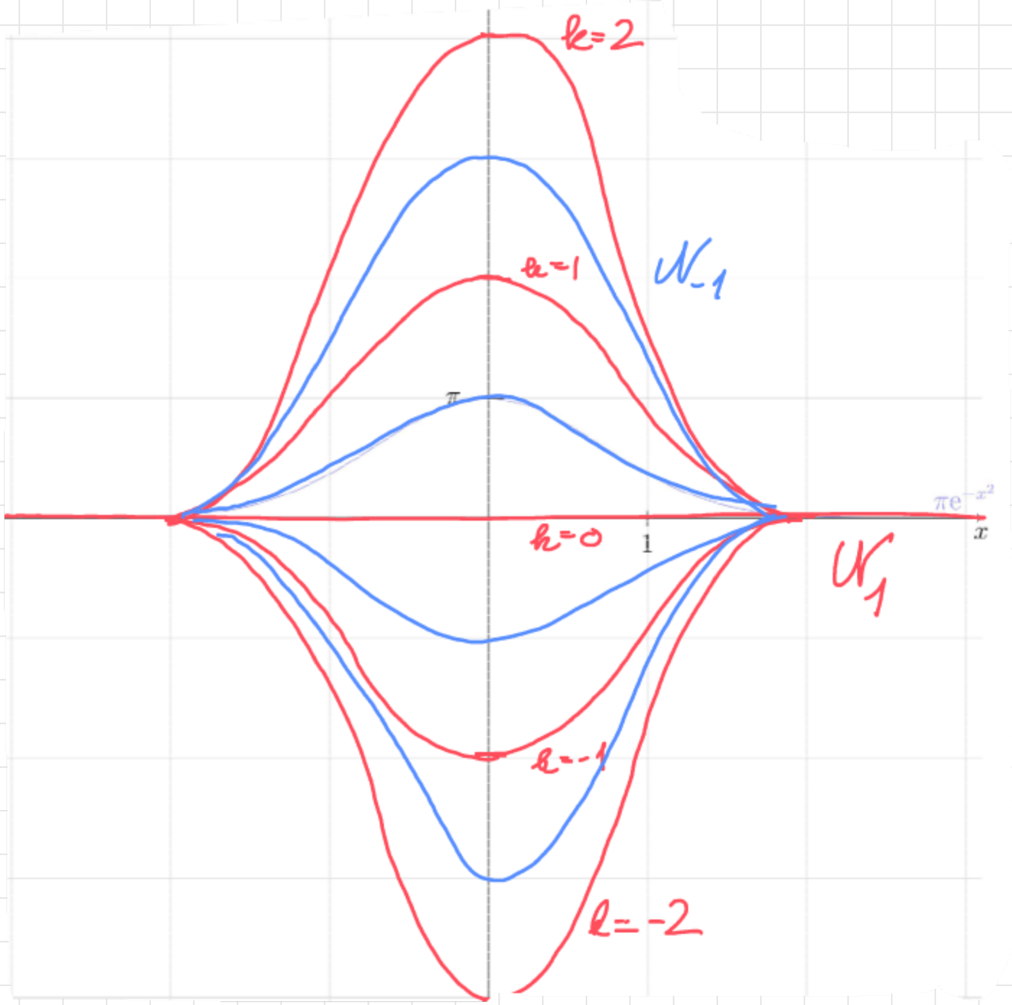
$$\Leftrightarrow \quad y = 2k\pi \cdot e^{-x^2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

N_{-1}:

$$-1 = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cos\left(y e^{x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y e^{x^2} = (2k+1)\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (2k+1)\pi \cdot e^{-x^2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



f) $\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy \sin(ye^{x^2}) \cdot e^{x^2} \\ -\sin(ye^{x^2}) \cdot e^{x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gilt genau dann, wenn $\sin(ye^{x^2}) = 0$ ist,

also $ye^{x^2} = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Also genau die Punkte von $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_{-1}$.

Aufgabe V38

Nach Lemma 4.2.10

ist g stetig in allen Punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

für die $(x^2+y^2)^n \neq 0$,

also in allen Punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zu untersuchen ist also Stetigkeit

in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir zeigen den Tipp:

Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$.

Dann gilt $r = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$

Und sei $r = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| < 1$

Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$, gilt $\left| g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 0 \leq \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$

Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann ist

$$\left| g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{r^j \cos(\varphi)^j \cdot r^k \sin(\varphi)^k}{(r^2 \cos(\varphi)^2 + r^2 \sin(\varphi)^2)^n} \right|$$

$$= \frac{r^{j+k}}{r^{2n}} \left| \frac{\cos(\varphi)^j \cdot \sin(\varphi)^k}{(\underbrace{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2}_{1})^n} \right|$$

$$= \underbrace{\underbrace{r}_{<1}{}^{\overbrace{j+k-2n}^{>0}}}_{\leq r} \underbrace{|\cos(\varphi)^j \sin(\varphi)^k|}_{\leq 1}$$

$$\leq r = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$$

Und nun?: Der Tipp stellt einen Zusammenhang zwischen den eingesetzten Werten und der ausgerechneten Funktion dar.

Möglichkeit 1: ε-δ-Kriterium

Def. 4.2.6.

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta := \min(1, \varepsilon) > 0$

Ist $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| < \delta$, dann ist $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| < 1$

Dank Tipp folgt

$$\left| g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| = \left| g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \leq \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| < \delta \leq \varepsilon$$

$\square$

Möglichkeit 2: Folgen-Kriterium (4.2.7)

Sei $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ eine Nullfolge.

Es folgt $\left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\| \to 0$.

Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt $\left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\| < 1$. („weit genug" in der Folge)

Dann ist für $n \geq N$: $0 \leq \left| g\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right| \leq \left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\|$

Dank Sandwichsatz gilt $\left| g\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right| \to 0$,

also konvergiert $g\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ gegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\square$

Aufgabe V39

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{cases} xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ 0, & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \end{cases}$$

a) Ja, dank V38

b) In $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ können wir die partiellen Ableitungen mit Hilfe der Ableitungsregeln bestimmen:

$$f_x\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\cdot\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{2x\cdot 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\cdot\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

In $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$:

$f\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} = 0$ für $x \neq 0$ und $x = 0$,

also $f_x\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} = 0$, insbesondere $f_x\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0$

Ähnlich $f_y\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0$

Die partiellen Ableitungen f_x & f_y sind wiederum stetig, da sie zusammen gesetzt sind aus stetigen Funktion (vgl. Satz 4.2.8). Das wiederum wissen wir wegen V38.

c) $f_{xy}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$:

$$f_x\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = -y, \text{ also } (f_x)_y\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = -1$$

$$\Rightarrow f_{xy}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = -1$$

$f_{yx}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$:

$$f_y\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} = x \Rightarrow (f_y)_x\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow f_{yx}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 1$$

4.3.10

d) Nein sonst wäre dank Satz von Schwarz

$$f_{xy}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f_{yx}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

In c) haben wir aber nachgerechnet, dass dies für $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ nicht gilt.

Damit haben wir gezeigt: $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$